Einführung in die Finanzmathematik

- Grundlagen der Zins- und Rentenrechnung -

Gliederung

Teil I: Zinsrechnung

- Ökonomische Grundlagen

Einfache Verzinsung

- Jährliche, einfache Verzinsung
- Unterjährliche, einfache Verzinsung

Verzinsung mit Zinseszinsen

- Jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
- Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
- Stetige Verzinsung mit Zinseszinsen

Gliederung

Teil II: Rentenrechnung

- Definitionen

Jährliche Rentenzahlungen

- Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen
- Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Unterjährliche Rentenzahlungen

- Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung
- Variante 2: Unterjährlich-nachschüssige Zinsberechnung mit gleich langer Zins-und Rentenperiode

Ewige Renten

Teil I: Zinsrechnung

Ökonomische Grundlagen

Arten der Verzinsung

- Wenn ein Anleger einen bestimmten Geldbetrag leihweise einem anderen Wirtschaftssubjekt überlässt, so zahlt ihm dieses für die leihweise Überlassung des Anlagebetrages üblicherweise ein Entgelt.
  Dieses Entgelt wird als Zins bezeichnet.

- Die Höhe der gezahlten Zinsen hängt von dem vereinbarten Zinssatz, der Höhe des Anlagebetrages und von der Länge des Zeitraums ab, für den die Überlassung des Anlagebetrages erfolgt. (Die Länge dieses Zeitraums wird als die Laufzeit der Geldanlage bezeichnet).

Ökonomische Grundlagen

Zinsen können auf unterschiedliche Weise berechnet werden.

Konkret wird

a) nach der Länge des Zinszeitraums zwischen **jährlicher** und **unterjähriger** Verzinsung

b) nach der Art und Weise, wie die bereits gezahlten Zinsen behandelt werden, zwischen **einfacher Verzinsung** und **Verzinsung mit Zinseszinsen** und

c) nach dem Zeitpunkt der Zinszahlung zwischen **vorschüssiger** und **nachschüssiger** Verzinsung

unterschieden.

Ökonomische Grundlagen

zu a): Unterscheidung nach der Länge des Bezugszeitraums:

- Ist genau einmal im Jahr eine Zinszahlung bzw. –gutschrift vorgesehen, so liegt jährliche Verzinsung vor.

  Jährliche Verzinsung bedeutet aber nicht, dass Zinsen nur gezahlt werden, wenn die Anlagedauer ein Jahr (oder ein ganzzahliges Vielfaches davon) beträgt! Vielmehr werden bei Laufzeiten von unter einem Jahr die auf diesen Zeitraum entfallenden Zinsen üblicherweise mit einem Zinssatz berechnet, der einem proportionalen Anteil des Jahreszinssatzes entspricht. Wird also etwa ein Betrag von EUR 10 000 zu einem Zinssatz von 3,5% p.a. angelegt, beträgt die Laufzeit der Anlage aber nur 20 Tage, so beträgt Zinsbetrag, der dem Anleger am Ende der Laufzeit vergütet wird, $(3{,}5/100)\cdot(20/365)\cdot$ EUR 10000 = EUR 19,18

- Wenn Zinsen mehrmals jährlich gezahlt bzw. gutgeschrieben werden, (also z.B. jeweils am Ende eines Halbjahres, ein Quartals, eines Monats oder sogar eines Tages), liegt eine unterjährliche Verzinsung vor. Auch in diesem Fall werden dann, wenn die tatsächliche Laufzeit kein ganzzahliges Vielfaches der Zeitraum zwischen, zwei Zinsszahlungen, üblicherweise anteilige Zinsen vergütet.

Ökonomische Grundlagen

zu a): Unterscheidung nach der Länge des Bezugszeitraums:

Als **Zinsperiode** wird der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Zinszahlungen (oder zwischen dem Beginn der Anlage und der ersten Zinszahlung) bezeichnet. (Dabei wird hier und im folgenden unterstellt, dass die Zinsen in stets gleichen Zeitabständen gezahlt werden und die letzte Zinszahlung am Ende des Anlagezeitraums erfolgt).

Ökonomische Grundlagen

zu b): Unterscheidung nach der Behandlung der gezahlten Zinsen:

- Wenn die ausgezahlten Zinsen dem Anlagebetrag zugeschlagen werden, so dass auf sie in den folgenden Perioden ebenfalls Zinsen gezahlt werden, so liegt eine Zahlung von Zinseszinsen vor.
- Werden dagegen die ausgezahlten Zinsen in den folgenden Perioden nicht verzinst (sondern - beispielsweise als Bargeld – unverzinslich angesammelt), so liegt eine einfache Verzinsung vor.

zu c): Unterscheidung nach dem Zeitpunkt der Zinszahlung:

- Werden die anfallenden Zinsen entweder am Ende jeder Zinsperiode oder am Ende der Laufzeit ausgezahlt, so liegt eine nachschüssige Verzinsung vor.
- Wenn dagegen die anfallenden Zinsen bereits am Beginn jeder Zinsperiode oder am Anfang der Laufzeit gezahlt, so liegt eine vorschüssige Verzinsung vor. Die vorschüssige Verzinsung ist jedoch für die Praxis ohne Belang. Deswegen wird im folgenden stets von einer nachschüssigen Verzinsung ausgegangen.

Ökonomische Grundlagen

Im Rahmen dieser einführenden Darstellung wird stets davon ausgegangen, dass es einen einzigen, fest vorgegebenen Zinssatz gibt, der von der (Rest-)Laufzeit der Anlage unabhängig ist und sich im Zeitverlauf nicht verändert.

Beide dieser Annahmen sind ausgesprochen grobe Vereinfachungen gegenüber der ökonomischen Realität. Die Marktpreise börsennotierter Schuldverschreibungen etwa lassen erkennen, dass empirisch beobachtbare Anlagezinsen sowohl von der verbleibenden Laufzeit der jeweiligen Anlage abhängig sind als auch im Zeitverlauf variieren können.

Trotzdem sind die hier vorgestellten Methoden und Bewertungs-verfahren von Nutzen, da komplexere, realitätsnähere Modelle auf ihnen aufbauen.

Gliederung

Teil I: Zinsrechnung

- Ökonomische Grundlagen

Einfache Verzinsung

- Jährliche, einfache Verzinsung
- Unterjährliche, einfache Verzinsung

Verzinsung mit Zinseszinsen

- Jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
- Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
- Stetige Verzinsung mit Zinseszinsen

Jährliche, einfache Verzinsung

Im folgenden bezeichne

A_0 den Anlagebetrag am Beginn der Laufzeit,

T die Laufzeit der Anlage

r den Zinssatz

A_t den nach Ablauf von t Jahren durch verzinsliche Anlage von A_0 akkumulierten Geldbetrag, und entsprechend

A_T den am Ende der Laufzeit verfügbaren Geldbetrag, der aus der verzinslichen Anlage von A_0 resultiert.

Anmerkung: A_T wird im folgenden auch kurz als der Endwert der Anlage bezeichnet.

Jährliche, einfache Verzinsung

Im Falle der einfachen Verzinsung werden die ausgezahlten Zinsen in den Folgeperioden nicht verzinst.

Folglich erhält der Anleger in diesem Fall am Ende jeder Zinsperiode einen Geldbetrag in Höhe von

$$r \cdot A_0$$

als Zinszahlung. Da diese Zahlungen annahmegemäß nicht weiter verzinst werden, kann der Anleger am Ende der Laufzeit über die Summe aus dem anfänglichen Anlagebetrag und den *T* jährlichen Zinszahlungen verfügen; es gilt also

$$\begin{aligned} A_T &= A_0 + T \cdot r \cdot A_0 \\ &= A_0 \cdot (1 + T \cdot r) \end{aligned}$$

Gliederung

Teil I: Zinsrechnung

- Ökonomische Grundlagen

Einfache Verzinsung

- Jährliche, einfache Verzinsung
- Unterjährliche, einfache Verzinsung

Verzinsung mit Zinseszinsen

- Jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
- Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
- Stetige Verzinsung mit Zinseszinsen

Unterjährliche, einfache Verzinsung

Im Falle der unterjährlichen, einfachen Verzinsung werden die Zinsen werden mehrmals pro Jahr ausgezahlt und in den Folgeperioden nicht verzinst.

Damit unterjährliche und jährliche Verzinsung in der Darstellung besser unterschieden werden können, wird im folgenden das Symbol z für den Zinssatz pro Zinsperiode verwendet.

Außerdem bezeichne P die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr. Es gilt folgender Zusammenhang

$$P = \frac{1}{\text{Dauer einer Zinsperiode in Jahren}}$$

Bei monatlicher Verzinsung gilt also $P = 12$ (da die Dauer einer Zinsperiode einen Monat, also 1/12 Jahr beträgt), bei quartalsweiser Verzinsung $P = 4$ und bei halbjährlicher Verzinsung $P = 2$.

Unterjährliche, einfache Verzinsung

Wenn mit noch kürzeren Zinsperioden gerechnet werden soll, so wird in der kaufmännischen Praxis häufig zur rechnerischen Vereinfachung einheitlich

1 Jahr = 360 (Zins-)Tage und

1 Monat = 30 (Zins-)Tage

gesetzt.

Diese Praxis wird hier und im folgenden übernommen. Bei täglicher Verzinsung gelte also für die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr $P = 360$.

Der pro unterjährlicher Zinsperiode gezahlte Zins z lässt sich wie folgt in einen rechnerischen Jahreszins umrechnen:

$$r = z \cdot P$$

Unterjährliche, einfache Verzinsung

Im Falle der unterjährlichen, einfachen Verzinsung erhält der Anleger am Ende jeder Zinsperiode einen Geldbetrag in Höhe von

$$z \cdot A_0$$

als Zinszahlung. Da diese Zahlungen annahmegemäß nicht weiter verzinst werden, kann der Anleger am Ende der Laufzeit über die Summe aus dem anfänglichen Anlagebetrag und den $T \cdot P$ jährlichen Zinszahlungen verfügen; es gilt also

$$\begin{aligned} A_T &= A_0 + T \cdot P \cdot z \cdot A_0 \\ &= A_0 \cdot (1 + T \cdot P \cdot z) \end{aligned}$$

oder, wegen $r = z \cdot P$, auch in diesem Falle

$$A_T = A_0 \cdot (1 + T \cdot r)$$

Gliederung

Teil I: Zinsrechnung

- Ökonomische Grundlagen

Einfache Verzinsung

- Jährliche, einfache Verzinsung
- Unterjährliche, einfache Verzinsung

Verzinsung mit Zinseszinsen

- Jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
- Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
- Stetige Verzinsung mit Zinseszinsen

Jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen

- Eine jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen ist dann gegeben, wenn die in einem Jahr gezahlten Zinsen dem angelegten Kapitalbetrag zugeschlagen werden und somit den Kapitalbetrag des jeweiligen Folgejahres erhöhen.

- Die am Ende dieses Folgejahres zu leistende Zinszahlung entspricht dann dem mathematischen Produkt aus dem Zinssatz und dem „neuen“, erhöhten Kapitalbetrag (siehe tabellarische Darstellung auf der nächsten Seite).

Jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen

Tabellarische Darstellung der jährlichen Verzinsung mit Zinseszinsen

Jahr	Kapitalbestand am Anfang des Jahres	Zinserträge am Ende des Jahres	Kapitalbestand am Ende des Jahres
1	A_0	$r \cdot A_0$	$A_1 = (1+r) \cdot A_0$
2	A_1	$r \cdot A_1$	$A_2 = (1+r) \cdot A_1 = (1+r)^2 \cdot A_0$
3	A_2	$r \cdot A_2$	$A_3 = (1+r) \cdot A_2 = (1+r)^3 \cdot A_0$
...	...	...	...
T	A_{T-1}	$r \cdot A_{T-1}$	$A_T = (1+r) \cdot A_{T-1} = (1+r)^T \cdot A_0$

Jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen

Diese Darstellung lässt erkennen, dass bei einer jährlichen Verzinsung mit Zinses-Zinsen die Höhe des am Ende der Anlagelaufzeit akkumulierten Kapitals, A_T, wie folgt als eine Funktion des Zinssatzes r und des anfänglichen Kapitals A_0 berechnet werden kann:

$$A_T = (1+r)^T \cdot A_0$$

Eine in der Finanzmathematik häufig gestellte Frage lautet:

„Wie hoch muss sich ein (als bekannt vorausgesetzter) Anlagebetrag A_0 verzinsen, damit nach einer Laufzeit von T Jahren mit Zinseszinsen ein Kapital von A_T akkumuliert wird?“

Zur Beantwortung dieser Frage muss die obige Gleichung nach r aufgelöst werden. Es gilt:

$$\frac{A_T}{A_0} = (1+r)^T \quad \text{und folglich} \quad \left(\frac{A_T}{A_0}\right)^{\frac{1}{T}} = 1+r \quad \text{bzw.} \quad r = \left(\frac{A_T}{A_0}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

Jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen

Eine andere mögliche Frage lautet:

„Für welche Zeitdauer muss ein Anlagebetrag A_0 zu einem Zinssatz r angelegt werden, damit am Ende der Laufzeit mit Zinseszinsen ein Kapitalbetrag von A_T erreicht wird?

In diesem Falle muss die Gleichung, die den Zusammenhang zwischen A_o, A_T, r und T Beschreibt, nach T aufgelöst werden.

Es gilt: $$A_T = (1+r)^T A_0$$

Daraus folgt $$\ln A_T = T \cdot \ln(1+r) + \ln A_0$$

und $$T = \frac{\ln A_T - \ln A_0}{\ln(1+r)}$$

bzw. $$T = \frac{\ln(A_T / A_0)}{\ln(1+r)}$$

Definition und Berechnung von Barwerten

Definition:

Unter dem Barwert einer einzelnen, *T* Zinsperioden in der Zukunft liegenden Zahlung Z_T wird derjenige Anlagebetrag verstanden, der, wenn er *T* Zinsperioden lang zum unterstellten Zinssatz angelegt wird, am Ende des Anlagezeitraums genau die Höhe dieser Zahlung erreicht.

Der Barwert einer Gesamtheit mehrerer auf einander folgender Zahlungen entspricht der Summe der Barwerte der einzelnen einzelnen Zahlungen.

Üblicherweise wird bei der Berechnung von Barwert eine Verzinsung mit Zinseszinsen unterstellt. Das ist nicht zwingend notwendig, wird hier aber aus Vereinfachungsgründen ebenfalls so gehandhabt.

Definition und Berechnung von Barwerten

Berechnung des Barwerts einer einzelnen Zahlung bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszinsen:

Gesucht ist derjenige Anlagebetrag B_0, der, wenn er T Jahre lang zum unterstellten Zinssatz r p.a. angelegt wird, am Ende des Anlagezeitraums genau die Höhe der Zahlung Z_T erreicht.

Zwischen B_0 und Z_T besteht in diesem Fall der folgende Zusammenhang:

$$B_0 = (1+r)^{-T} \cdot Z_T$$

Sind B_0 und r bekannt, so lässt sich der Barwert der einzelnen Zahlung also durch einfaches Einsetzen in die obige Gleichung ermitteln.

Definition und Berechnung von Barwerten

Berechnung des Barwerts der Gesamtheit mehrerer aufeinander folgender Zahlungen mit Zinseszinsen bei jährlicher Verzinsung:

Hier wird unterstellt, dass in mehreren aufeinander folgenden Jahren $t = 1, \ldots, T$ jeweils Zahlungen in Höhe von $Z_1, Z_2, \ldots, Z_T$ zu verzeichnen sind. Da der Barwert der Gesamtheit dieser Zahlungen laut Definition mit der Summe der Barwerte der einzelnen Zahlungen identisch ist, gilt in diesem Falle der Zusammenhang

$$B_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r)^t}$$

bzw.

$$B_0 = \sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-t} \cdot Z_t$$

Gliederung

Teil I: Zinsrechnung

- Ökonomische Grundlagen

Einfache Verzinsung

- Jährliche, einfache Verzinsung
- Unterjährliche, einfache Verzinsung

Verzinsung mit Zinseszinsen

- Jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
- Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
- Stetige Verzinsung mit Zinseszinsen

Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen

Im Falle der unterjährlichen Verzinsung mit Zinseszinsen beträgt die Länge einer Zinsperiode stets nur den Bruchteil eines Jahres. Anders als bei der einfachen unterjährlichen Verzinsung wird aber davon ausgegangen, dass die am Ende einer Zinsperiode gezahlten Zinsen bis zum Ende der Laufzeit wieder zu dem bestehenden Zinssatz angelegt werden.

Auch hier wird das Symbol z für einen Zinssatz verwendet, der sich auf eine Zinsperiode von unter einem Jahr Länge bezieht.

Die Anzahl der Zinsperioden in einem Jahr wird, wie im Abschnitt über die unterjährige, einfache Verzinsung, mit P bezeichnet, so dass auch hier der Zusammenhang

$$P = \frac{1}{\text{Dauer einer Zinsperiode in Jahren}}$$

gilt.

Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen

Dann lässt sich (analog zur Vorgehensweise bei der jährlichen Verzinsung mit Zinseszinsen) zeigen, dass zwischen

dem Endwert der jeweiligen Anlage A_T,

dem Anlagebetrag A_0,

der Laufzeit in Jahren T,

dem für eine Zinsperiode maßgeblichen Zinssatz z, und

der Anzahl der Zinsperioden in einem Jahr P

der folgende Zusammenhang besteht:

$$A_T = A_0 (1+z)^{T \cdot P}$$

Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen

Zwischen dem rechnerischen Jahreszinssatz r und dem auf je eine Zinsperiode bezogenen Zinssatz z besteht der folgende Zusammenhang:

$$r \;=\; z \cdot P$$

Wenn also eine unterjährliche Verzinsung vorliegt, aber anstelle des perioden-bezogenen Zinssatzes z der rechnerische Jahreszinssatz r als Berechnungsgrund-lage verwendet wird, so lässt sich der Endwert bei einer Anlage mit Zinseszinsen schreiben als

$$A_T \;=\; A_0 \left(1 + \frac{r}{P}\right)^{T \cdot P}$$

Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen

Der effektive Jahreszinssatz:

Der effektive Jahreszins (im folgenden mit r^* bezeichnet) ist derjenige Zinssatz, der im Falle einer jährlichen Verzinsung erzielt werden müsste, damit der Endwert der Anlage bei jährlicher Verzinsung mit dem Endwert bei unterjährlicher Verzinsung übereinstimmt.

Zwischen dem effektiven Jahreszins r^* und dem unterjährlichen Periodenzinssatz z besteht also der folgende Zusammenhang:

$$A_0 (1+z)^{T \cdot P} \;=\; A_0 \left(1+r^*\right)^T \quad \left(=\; A_T\right)$$

Daraus folgt für den Zusammenhang zwischen dem effektiven Jahreszins und dem periodenbezogenen Zinssatz bei unterjährlicher Verzinsung

$$r^* \;=\; (1+z)^P - 1$$

Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen

Zwischen dem rechnerischen Jahreszinsatz r und dem periodenbezogenen Zinssatz z besteht bei unterjährlicher Verzinsung der Zusammenhang

$$r \;=\; z \cdot P$$

mit P = Anzahl der Zinsperioden pro Jahr.

Daher besteht zwischen dem effektiven Jahreszins r^* und dem rechnerischen Jahreszinssatz r bei unterjährlicher Verzinsung der folgende Zusammenhang:

$$r^* \;=\; \left(1 + \frac{r}{P}\right)^P - 1$$

$$r^* \;=\; (1 + z)^P - 1$$

Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen

Gelegentlich finden sich auch Fälle, in denen von dem effektiven Jahreszins auf den unterjährlichen Periodenzinssatz geschlossen werden soll. Problemstellungen dieser Art lassen sich einfach lösen, indem die zuletzt genannte Gleichung nach z aufgelöst wird:

Aus

$$r^* = (1+z)^P - 1$$

folgt

$$1+r^* = (1+z)^P$$

oder

$$(1+r^*)^{1/P} = 1+z$$

und schließlich

$$z = (1+r^*)^{1/P} - 1$$

Gliederung

Teil I: Zinsrechnung

- Ökonomische Grundlagen

Einfache Verzinsung

- Jährliche, einfache Verzinsung
- Unterjährliche, einfache Verzinsung

Verzinsung mit Zinseszinsen

- Jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
- Unterjährliche Verzinsung mit Zinseszinsen
- Stetige Verzinsung mit Zinseszinsen

Stetige Verzinsung mit Zinseszinsen

Die stetige Verzinsung ist eine Form der unterjährigen Verzinsung, bei der unterstellt wird, dass die Länge der Zinsperiode infinitesimal klein wird (und folglich die Anzahl der Zinsperioden im Jahr gegen unendlich geht).

In diesem Fall gilt für den Zusammenhang zwischen dem anfänglichen Anlagebetrag A_0 und dem Endwert der Anlage A_T der folgende Zusammenhang:

$$A_T = A_0 \cdot \lim_{P \to \infty} \left(1 + \frac{r}{P}\right)^{T \cdot P}$$

Dies lässt sich umschreiben zu

$$A_T = A_0 \cdot \lim_{P \to \infty} \left[\left(1 + \frac{r}{P}\right)^{\frac{P}{r}}\right]^{r \cdot T}$$

Stetige Verzinsung mit Zinseszinsen

Der Mathematiker Leonhard Euler (* Basel 1707, † Petersburg 1783) stellte fest, dass allgemein folgendes gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} = 2{,}71828182845905...$$

Diese sogenannte Euler‘sche Zahl wird üblicherweise mit dem Symbol *e* bezeichnet.

Wird nun das *x* aus der obigen Gleichung (im Rahmen dieser Berechnung) mit *P/r* gleichgesetzt, so lässt sich der Zusammenhang zwischen A_T und A_0 bei stetiger Verzinsung folglich schreiben als

$$A_T = A_0 \cdot e^{r \cdot T}$$

Teil II: Rentenrechnung

Definitionen

Auf dem Gebiet der Finanzmathematik wird als **Rente** eine Gesamtheit von Zahlungen verstanden, die in konstanter Höhe periodisch wiederkehren.

Die einzelne Zahlung im Rahmen einer Rente wird als eine **Rentenrate** bezeichnet.

Arten von Renten

Auf dem Gebiet der Renten lassen sich verschiedene Erscheinungsformen unterscheiden:

1.) Hinsichtlich der Länge des Rentenlaufzeit wird zwischen

1.1.) endlichen Renten mit einer begrenzten und bekannten Laufzeit,
1.2.) endlichen Renten mit einem begrenzten, aber unbekannten Laufzeit und
1.3.) unendlichen (=„ewigen“) Renten mit einer unbegrenzten Laufzeit

unterschieden.

Im Rahmen dieser einführenden Darstellung wird lediglich auf die Fälle 1.1) und 1.3.) näher eingegangen.

2.) Bezüglich der Länge des Zeitraums zwischen zwei aufeinander folgenden Rentenzahlungen wird zwischen

2.1.) jährlichen Renten (mit jährlich wiederkehrenden Rentenzahlungen) und
2.2.) unterjährlichen Renten (mit z.B. monatlich oder quartalsweise wiederkehrenden Rentenzahlungen)

unterschieden.

Arten von Renten

3.) Bezogen auf die Fälligkeit der Rentenzahlungen lässt sich zwischen

3.1.) vorschüssigen Rentenzahlungen, die jeweils zu Beginn einer Rentperiode fällig werden (dies ist z.B. häufig bei Mieten der Fall), und

3.2.) nachschüssigen Rentenzahlungen, die jeweils am Ende der Rentenperiode fällig werden ,

unterscheiden.

4.) Hinsichtlich der Länge der Zinsperiode wird zwischen

4.1.) jährlicher Verzinsung und

4.2.) unterjährlicher Verzinsung

unterschieden.

5.) Die Art der Verzinsung kann

5.1.) einfach oder

5.2.) zinseszinslich sein.

Arten von Renten

6.) Möglich ist ferner die Einteilung der Rentenarten nach der Fälligkeit der Zinsen auf das zugrunde liegende Kapital. Unterschieden wird dabei zwischen

6.1.) nachschüssigen Zinsen und

6.2.) vorschüssigen Zinsen.

Diese Unterscheidung ist allerdings eher theoretischer Natur; die vorschüssige Verzinsung ist in der ökonomischen Praxis unüblich.

Eine Vielzahl von Kombinationen der unter den Puntken 1.) bis 6.) genannten Merkmale sind denkbar. Hier werden nur die für die Praxis relevanten Rentenarten behandelt.

Gliederung

Teil II: Rentenrechnung

- Definitionen

Jährliche Rentenzahlungen

- Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen
- Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Unterjährliche Rentenzahlungen

- Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung
- Variante 2: Unterjährlich-nachschüssige Zinsberechnung mit gleich langer Zins-und Rentenperiode

Ewige Renten

Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Hier werden Fälle analysiert, in denen während eines begrenzten Zeitraums jeweils am Ende eines Jahres eine bestimmte Rentenzahlung Z geleistet wird. Es wird davon ausgegangen, dass die Rentenzahlungen zu einem festen Zinssatz zinseszinslich angelegt werden können, und dass der Kapitalbetrag, aus dem die geleisteten Rentenzahlungen möglicherweise finanziert werden, ebenfalls zinseszinslich angelegt ist.

Im folgenden bezeichnet

- r den Zinssatz, mit dem die Rentenraten und ggf. der Kapitalbestand verzinst werden,
- B_0 den Barwert der Gesamtheit aller Rentenzahlungen am Anfang der Laufzeit,
- T die Länge der Rentenlaufzeit in Jahren und
- W_T den Endwert der Gesamtheit aller Rentenzahlungen, also das verfügbare Kapital, das nach T geleisteten Rentenzahlungen einschließlich der erhaltenen Zinsen und Zinseszinsen zur Verfügung steht

Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Ermittlung des Rentenbarwertes:

Der Barwert B_0 der Gesamtheit aller Rentenzahlungen lässt sich in diesem Fall wie folgt ausdrücken:

$$B_0 = \sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-t} \cdot Z$$

bzw. (nach „Ausklammern“ von Z),

$$B_0 = Z \cdot \sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-t}$$

Da die Durchführung dieser Summation bei langen Rentenlaufzeiten recht aufwändig sein kann, suchen wir im folgenden nach einem „kompakteren“ Ausdruck.

Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Ermittlung des Rentenbarwertes (fortgesetzt):

Um diesen Ausdruck zu vereinfachen, wird im Zuge einer Nebenrechnung zunächst der Term $B_0 - (1+r)^{-1} \cdot B_0$ gebildet:

$$B_0 - (1+r)^{-1} B_0$$

$$= \left[Z \cdot \left((1+r)^{-1} + \ldots + (1+r)^{-T}\right)\right] - (1+r)^{-1} \cdot \left[Z \cdot \left((1+r)^{-1} + \ldots + (1+r)^{-T}\right)\right]$$

$$= \left[Z \cdot \left((1+r)^{-1} + \ldots + (1+r)^{-T}\right)\right] - \left[Z \cdot \left((1+r)^{-2} + \ldots + (1+r)^{-(T+1)}\right)\right]$$

$$= \left[Z \cdot \left((1+r)^{-1} - (1+r)^{-(T+1)}\right)\right]$$

da sich die Ausdrücke $(1+r)^{-2}$ bis $(1+r)^{-T}$ in der zweiten Zeile von unten gegenseitig aufheben.

Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Ermittlung des Rentenbarwertes (fortgesetzt):

Durch Multiplikation beider Seiten des zuletzt genannten Ausdrucks mit $(1+r)$ ergibt sich

$$rB_0 = Z \cdot \left[1-(1+r)^{-T}\right]$$

bzw.

$$B_0 = \frac{Z}{r} \cdot \left[1-\frac{1}{(1+r)^T}\right]$$

Daraus ergibt sich als Formel für den Rentenbarwert in diesem Fall

$$B_0 = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T-1}{r \cdot (1+r)^T}\right]$$

Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Ermittlung des Rentenendwertes:

Der Rentenendwert ließe sich in ähnlicher Weise herleiten wie der Rentenbarwert vorher. Für die Zwecke dieser Darstellung reicht es aber, sich vor Augen zu führen, dass der Rentenendwert W_T demjenigen Betrag entspricht, der sich ergäbe, wenn der Rentenbarwert B_0 für eine Dauer von T Perioden zum Zinssatz r zinseszinslich angelegt werden würde:

$$W_T = B_0 \cdot (1+r)^T$$

Daraus ergibt sich als Formel für den Rentenendwert in diesem Fall

$$W_T = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r} \right]$$

Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Rentenrate bei vorgegebenem Rentenbarwert und bekannter Laufzeit

In diesem Fall geht es um die Fragestellung, wie hoch eine für die Dauer von *T* Jahren jährlich-nachschüssig zu gewährende Rentenzahlung *Z* ist, wenn der Kapitalbetrag, aus dem diese Zahlungen gespeist werden sollen, bekannt (und mit dem Rentenbarwert identisch) ist.

In diesem Fall ist die Bestimmungsgleichung für den Rentenbarwert

$$B_0 = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^T} \right]$$

nach der Rentenzahlung aufzulösen:

$$Z = B_0 \cdot \left[\frac{r \cdot (1+r)^T}{(1+r)^T - 1} \right]$$

Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Rentenrate bei vorgegebenem Rentenendwert und bekannter Laufzeit

Ist die Rentenlaufzeit T vorgegeben und der Rentenendwert W_T bekannt, und soll die Höhe der jährlich-nachschüssig zu gewährenden Rentenzahlung Z ernmittelt werden, so ist die Bestimmungsgleichung für den Rentenendwert

$$W_T = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r} \right]$$

nach der Rentenzahlung aufzulösen:

$$Z = W_T \cdot \left[\frac{r}{(1+r)^T - 1} \right]$$

Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Laufzeit bei vorgegebenem Rentenbarwert und bekannter Höhe der jährlichen Rentenzahlung

In diesem Fall lautet die Fragestellung, wie lange (T) eine jährlich-nachschüssige Rentenzahlung in bekannter Höhe Z gewährt werden kann, wenn der den Rentenzahlungen zugrunde liegende Kapitalbetrag bekannt (und mit dem Rentenbarwert B_0 identisch) ist.

Ausgangspunkt ist wiederum die Bestimmungsgleichung für den Rentenbarwert:

$$B_0 = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^T} \right]$$

Diese lässt sich umformen zu

$$r \cdot (1+r)^T \cdot B_0 = Z \cdot \left[(1+r)^T - 1 \right]$$

Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Laufzeit bei vorgegebenem Rentenbarwert und bekannter Höhe der jährlichen Rentenzahlung (fortgesetzt)

Ausklammern des Terms $(1+r)^T$ führt zu

$$(1+r)^T \cdot (r \cdot B_0 - Z) = -Z$$

bzw., nach Multiplikation beider Seiten mit (-1),

$$(1+r)^T \cdot (Z - r \cdot B_0) = Z$$

Auflösung nach $(1+r)^T$ ergibt

$$(1+r)^T = \frac{Z}{(Z - r \cdot B_0)}$$

Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Laufzeit bei vorgegebenem Rentenbarwert und bekannter Höhe der jährlichen Rentenzahlung (fortgesetzt)

Nun werden beide Seiten dieser Gleichung logarithmiert

$$T \cdot \ln(1+r) \;=\; \ln Z - \ln(Z - r \cdot B_0)$$

und das Ergebnis nach T aufgelöst

$$T \;=\; \frac{\ln Z - \ln(Z - r \cdot B_0)}{\ln(1+r)}$$

Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Laufzeit bei vorgegebenem Rentenendwert und bekannter Höhe der jährlichen Rentenzahlung

In diesem Fall lautet die Fragestellung, wie lange (T) eine jährlich-nachschüssige Rentenzahlung in bekannter Höhe Z geleistet werden muss, damit am Ende der Laufzeit ein vorgegebener Endwert erreicht wird.

Die Bestimmungsgleichung für den Rentenendwert lautet

$$W_T = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r} \right]$$

Sie lässt sich umformen zu

$$\frac{r \cdot W_T + Z}{Z} = (1+r)^T$$

Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Laufzeit bei vorgegebenem Rentenendwert und bekannter Höhe der jährlichen Rentenzahlung (fortgesetzt)

Durch Logarithmieren beider Seiten ergibt sich

$$\ln\left(r \cdot W_T + Z\right) - \ln Z = T \cdot \ln(1+r)$$

und nach Auflösung nach T

$$T = \frac{\ln\left(r \cdot W_T + Z\right) - \ln Z}{\ln(1+r)}$$

Gliederung

Teil II: Rentenrechnung

- Definitionen

Jährliche Rentenzahlungen

- Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen
- Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Unterjährliche Rentenzahlungen

- Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung
- Variante 2: Unterjährlich-nachschüssige Zinsberechnung mit gleich langer Zins-und Rentenperiode

Ewige Renten

Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen

Hier werden Fälle untersucht, in denen während eines endlichen Zeitraums jeweils am **Anfang** eines Jahres eine feste Rentenzahlung Z geleistet wird. Es wird davon ausgegangen, dass die Rentenzahlungen zu einem festen Zinssatz zinseszinslich angelegt werden können, und dass der Kapitalbetrag, aus dem die geleisteten Rentenzahlungen möglicherweise finanziert werden, ebenfalls zinseszinslich angelegt ist.

Im folgenden bezeichnet

- r den Zinssatz, mit dem die Rentenraten und ggf. der Kapitalbestand verzinst werden,
- B_0 den Barwert der Gesamtheit aller Rentenzahlungen am Anfang der Laufzeit,
- T die Länge der Rentenlaufzeit in Jahren und
- W_T den Endwert der Gesamtheit aller Rentenzahlungen, also das verfügbare Kapital, das nach T geleisteten Rentenzahlungen einschließlich der erhaltenen Zinsen und Zinseszinsen zur Verfügung steht

Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen

Ermittlung des Rentenbarwertes:

Eine Abfolge von *T* vorschüssig geleisteten Rentenzahlungen von identischer Höhe *Z* lässt sich gedanklich zerlegen in

- eine einzelne Zahlung in Höhe von *Z* zum Gegenwartszeitpunkt und
- (*T*-1) nachschüssige Zahlungen, jeweils in Höhe von *Z*, am Ende der Jahre 1, ..., (*T*-1)

Der Rentenbarwert B_0 bei jährlich-vorschüssigen Rentenzahlungen lässt sich daher als Summe der Barwerte dieser beiden Bestandteile auffassen und entsprechend berechnen. Es gilt also

$$B_0 = Z + Z \cdot \left[\frac{(1+r)^{T-1} - 1}{r \cdot (1+r)^{T-1}} \right]$$

Barwert der Zahlung am Anfang von Jahr 1 (jetzt)

Barwert der Zahlungen am Ende der Jahre 1, ..., *T*-1 bzw. am Anfang der Jahre 2, ..., *T*

Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen

Ermittlung des Rentenbarwertes (fortgesetzt):

Dies lässt sich umschreiben zu

$$B_0 \;=\; Z \cdot \frac{r \cdot (1+r)^{T-1}}{r \cdot (1+r)^{T-1}} \;+\; Z \cdot \left[\frac{(1+r)^{T-1} - 1}{r \cdot (1+r)^{T-1}} \right]$$

bzw.

$$B_0 \;=\; Z \cdot \left[\frac{r \cdot (1+r)^{T-1} + (1+r)^{T-1} - 1}{r \cdot (1+r)^{T-1}} \right]$$

oder

$$B_0 \;=\; Z \cdot \left[\frac{(1+r) \cdot (1+r)^{T-1} - 1}{r \cdot (1+r)^{T-1}} \right]$$

und schließlich

$$B_0 \;=\; Z \cdot \left[\frac{(1+r)^{T} - 1}{r \cdot (1+r)^{T-1}} \right]$$

Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen

Ermittlung des Rentenendwertes

Aus dem Rentenbarwert B_0 lässt sich auch hier der Rentenendwert W_T anhand des folgenden Zusammenhanges ableiten:

$$W_T = B_0 \cdot (1+r)^T$$

Wird die zuletzt angeführte Bestimmungsgleichung für B_0 hier eingesetzt, folgt daraus für den Rentenendwert W_T

$$W_T = Z \cdot (1+r) \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r} \right]$$

Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Rentenrate bei vorgegebenem Rentenbarwert und bekannter Laufzeit

Auch bei vorschüssigen Rentenzahlungen stellt sich die Frage, wie hoch eine für die Dauer von *T* Jahren jährlich-vorschüssig zu gewährende Rentenzahlung *Z* ist, wenn der Kapitalbetrag, aus dem diese Zahlungen gespeist werden sollen, bekannt (und mit dem Rentenbarwert identisch) ist.

Auch hier führt die Antwort über die Auflösung der Bestimmungsgleichung für den Rentenbarwert

$$B_0 = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^{T-1}} \right]$$

nach der Rentenzahlung *Z*:

$$Z = B_0 \cdot \left[\frac{r \cdot (1+r)^{T-1}}{(1+r)^T - 1} \right]$$

Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Rentenrate bei vorgegebenem Rentenendwert und bekannter Laufzeit

Ist nicht der Barwert, sondern der Endwert der jährlich-vorschüssig gewährten Rentenzahlungen bekannt, so kann die Höhe Z einer einzelnen Rentenzahlung ermittelt werden, indem die Bestimmungsgleichung für den Rentenendwert

$$W_T = Z \cdot (1+r) \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r} \right]$$

nach der Rentenzahlung Z aufgelöst wird:

$$Z = W_T \cdot \left[\frac{r}{(1+r) \cdot \left[(1+r)^T - 1\right]} \right]$$

Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Laufzeit bei vorgegebenem Rentenbarwert und bekannter Rentenrate

Nach dem schon bekannten Prinzip ist auch hier die Bestimmungsgleichung für den Rentenbarwert nach *T* aufzulösen. Es gilt:

$$B_0 = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^{T-1}} \right]$$

und folglich

$$B_0 \cdot r \cdot (1+r)^{T-1} = Z \cdot (1+r)^T - Z$$

Division beider Seiten durch $(1+r)^{T-1}$ ergibt

$$B_0 \cdot r = Z \cdot (1+r) - Z \cdot (1+r)^{-(T-1)}$$

Daraus folgt

$$\frac{B_0 \cdot r}{Z} - (1+r) = -(1+r)^{-(T-1)}$$

Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Laufzeit bei vorgegebenem Rentenbarwert und bekannter Rentenrate (fortgesetzt)

Multiplikation beider Seiten mit (-1) und anschließende Logarithmierung ergibt

$$\ln\left((1+r) - \frac{B_0 \cdot r}{Z}\right) = (1-T)\cdot\ln(1+r)$$

oder

$$\frac{\ln\left((1+r) - \frac{B_0 \cdot r}{Z}\right)}{\ln(1+r)} = (1-T)$$

Daraus folgt

$$T = 1 - \frac{\ln\left((1+r) - \frac{B_0 \cdot r}{Z}\right)}{\ln(1+r)}$$

Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Laufzeit bei vorgegebenem Rentenendwert und bekannter Rentenrate

Nach dem schon bekannten Prinzip ist auch hier die Bestimmungsgleichung für den Rentenendwert nach *T* aufzulösen. Es gilt:

$$W_T = Z \cdot (1+r) \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r} \right]$$

und folglich

$$W_T \cdot \frac{r}{(1+r)} = Z \cdot \left[(1+r)^T - 1 \right]$$

oder

$$W_T \cdot \frac{r}{Z \cdot (1+r)} + 1 = (1+r)^T$$

Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen

Herleitung der Laufzeit bei vorgegebenem Rentenendwert und bekannter Rentenrate (fortgesetzt)

Durch Logarithmieren beider Seiten der zuletzt genannten Gleichung ergibt sich

$$\ln\left(\frac{W_T \cdot r}{Z \cdot (1+r)} + 1\right) = T \cdot \ln(1+r)$$

und

$$T = \frac{\ln\left(\frac{W_T \cdot r}{Z \cdot (1+r)} + 1\right)}{\ln(1+r)}$$

Unterjährliche Rentenzahlungen

Von unterjährlichen Rentenzahlungen wird immer dann gesprochen, wenn die Rentenraten mehr als einmal pro Jahr gezahlt werden.

Aus Gründen der Praxisrelevanz wird hier nur zwischen zwei Varianten unterschieden:

Variante 1: Die Zinsen werden einmal jährlich nachschüssig berechnet:

Variante 2: Die Zinsen werden werden mehrfach pro Jahr berechnet, wobei der zeitliche Abstand zwischen zwei Rentenzahlungen (= die Länge einer Rentenperiode) mit der Länge einer Zinsperiode übereinstimmt.

Gliederung

Teil II: Rentenrechnung

- Definitionen

Jährliche Rentenzahlungen

- Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen
- Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Unterjährliche Rentenzahlungen

- Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung
- Variante 2: Unterjährlich-nachschüssige Zinsberechnung mit gleich langer Zins-und Rentenperiode

Ewige Renten

Unterjährliche Rentenzahlungen

Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung

In diesem Fall werden die vor Ende eines Jahres anfallenden Rentenzahlungen bis zum Jahresende einfach verzinst. Die innerhalb eines Jahres auf diesem Wege akkumulierten Rentenbeträge werden dann in den Folgejahren mit Zinseszinsen verzinst.

Hier und im folgenden wird davon ausgegangen, dass insgesamt M Rentenzahlungen in Höhe von $Z^{(m)}$ pro Jahr erfolgen, und dass zwischen je zwei aufeinander folgenden Rentenzahlungen ein Zeitabstand von $(1/M)$ Jahren liegt.

Der Barwert einer Abfolge unterjährlich geleisteter Rentenzahlungen lässt sich bei jährlich-nachschüssiger Verzinsung in zwei Schritten wie folgt ermitteln:

- Schritt 1: Zunächst wird ermittelt, wie hoch eine fiktive jährlich-nachschüssige Rente $\tilde{Z}^{(u)}$ sein müsste, damit ihr Wert genau der Summe aller bis zum Jahresende einfach aufgezinsten unterjährlichen Rentenzahlungen entspricht. Diese fiktive jährlich-nachschüssige Rente bezeichnen wir auch als „äquivalente Jahresrente".
- Schritt 2: Diese fiktive jährliche Rentenzahlung wird in die Formel für den Barwert einer jährlich-nachschüssigen Rente eingesetzt

Unterjährliche Rentenzahlungen

Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung

<u>Unterfall 1: Unterjährlich-nachschüssige Rentenzahlungen</u>

Im Falle unterjährlich-nachschüssiger Rentenzahlungen lässt sich diese äquivalente Jahresrente schreiben als

$$\tilde{Z} = Z^{(m)} \cdot \left(1 + r\frac{M-1}{M}\right) + Z^{(m)} \cdot \left(1 + r\frac{M-2}{M}\right) + \ldots + Z^{(m)} \cdot \left(1 + r\frac{1}{M}\right) + Z^{(m)}$$

erste Rentenrate am Ende von Teilperiode 1 einfach aufgezinst für (M-1) Teilperioden + zweite Rentenrate am Ende von Teilperiode 2 einfach aufgezinst für (m-2) Teilperioden + ... + letzte Rentenrate am Jahresende

Unterjährliche Rentenzahlungen

Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung

Unterfall 1: Unterjährlich-nachschüssige Rentenzahlungen (fortgesetzt)

Dies kann umgeschrieben werden zu

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z} &= Z^{(m)} \cdot \sum_{j=1}^{M} \left(1 + r \cdot \frac{M-j}{M} \right) \\
&= M \cdot Z^{(m)} + \frac{Z^{(m)} \cdot r}{M} \cdot \sum_{k=1}^{M-1} k \\
&= M \cdot Z^{(m)} + \frac{Z^{(m)} \cdot r}{M} \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{M-1} k + \sum_{k=1}^{M-1} M - k \right) \\
&= M \cdot Z^{(m)} + \frac{Z^{(m)} \cdot r}{M} \cdot \frac{1}{2} \left(M \cdot (M-1) \right)
\end{aligned}
$$

Unterjährliche Rentenzahlungen

Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung

<u>Unterfall 1: Unterjährlich-nachschüssige Rentenzahlungen (fortgesetzt)</u>

Durch Kürzen von M im zweiten Summanden und anschließendes Ausklammern von $Z^{(m)}$ ergibt als Zusammenhang zwischen der äquivalenten Jahresrente $\tilde{Z}$ und dem tatsächlichen, unterjährlich entrichteten Rentenbetrag $Z^{(m)}$

$$\tilde{Z} = Z^{(m)} \cdot \left[M + \frac{r}{2} \cdot (M-1) \right]$$

Einsetzen des so berechneten Terms $\tilde{Z}$ in die Formel für den Barwert einer jährlich-nachschüssigen Rente ergibt

$$B_0 = \tilde{Z} \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^T} \right] \quad \text{bzw.} \quad B_0 = Z^{(m)} \cdot \left[M + \frac{r}{2} \cdot (M-1) \right] \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^T} \right]$$

Unterjährliche Rentenzahlungen

Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung

Unterfall 2: Unterjährlich-vorschüssige Rentenzahlungen

Im Falle unterjährlich-nachschüssiger Rentenzahlungen kann die äquivalente Jahresrente wie folgt beschrieben werden:

$$\tilde{Z} \;=\; Z^{(m)} \cdot \left(1 + r\frac{M}{M}\right) + Z^{(m)} \cdot \left(1 + r\frac{M-1}{M}\right) + \ldots + Z^{(m)} \cdot \left(1 + r\frac{1}{M}\right)$$

erste Rentenrate am Beginn von Teilperiode 1	einfach aufgezinst für M Teilperioden	zweite Rentenrate am Ende von Teilperiode 2	einfach aufgezinst für (m-2) Teilperioden	**+**	**...**	letzte Rentenrate, eine Teilperiode vor Jahresende	einfach aufgezinst für eine Teilperiode

Unterjährliche Rentenzahlungen

Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung

Unterfall 2: Unterjährlich-vorschüssige Rentenzahlungen (fortgesetzt)

Dies lässt sich umschreiben zu

$$\tilde{Z} = Z^{(m)} \cdot \sum_{j=1}^{M} \left(1 + r \cdot \frac{j}{M}\right)$$

$$= M \cdot Z^{(m)} + \frac{Z^{(m)} \cdot r}{M} \cdot \sum_{j=1}^{M} j$$

$$= M \cdot Z^{(m)} + \frac{Z^{(m)} \cdot r}{M} \cdot \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^{M} j + \sum_{j=1}^{M} M - j \right)$$

$$= M \cdot Z^{(m)} + \frac{Z^{(m)} \cdot r}{M} \cdot \frac{1}{2} \left(M \cdot (M+1) \right)$$

Unterjährliche Rentenzahlungen

Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung

Unterfall 2: Unterjährlich-vorschüssige Rentenzahlungen (fortgesetzt)

Durch Kürzen von M im zweiten Summanden und anschließendes Ausklammern von $Z^{(m)}$ ergibt als Zusammenhang zwischen der äquivalenten Jahresrente $\tilde{Z}$ und dem tatsächlichen, unterjährlich entrichteten Rentenbetrag $Z^{(m)}$

$$\tilde{Z} = Z^{(m)} \cdot \left[M + \frac{r}{2} \cdot (M+1) \right]$$

Einsetzen des so berechneten Terms $\tilde{Z}$ in die Formel für den Barwert einer jährlich-nachschüssigen Rente ergibt

$$B_0 = \tilde{Z} \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^T} \right] \quad \text{bzw.} \quad B_0 = Z^{(m)} \cdot \left[M + \frac{r}{2} \cdot (M+1) \right] \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^T} \right]$$

Gliederung

Teil II: Rentenrechnung

- Definitionen

Jährliche Rentenzahlungen

- Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen
- Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Unterjährliche Rentenzahlungen

- Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung
- Variante 2: Unterjährlich-nachschüssige Zinsberechnung mit gleich langer Zins-und Rentenperiode

Ewige Renten

Unterjährliche Rentenzahlungen

Variante 2: Unterjährlich-nachschüssige Zinsberechnung mit gleich langer Zins- und Rentenperiode

Diese Fragestellung kann rechnerisch ähnlich gehandhabt werden wie der Fall jährlicher Rentenzahlungen und Zinsberechnungen. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, das

- anstelle des jährlichen Zinssatzes r der sog. relative unterjährliche Periodenzinssatz $z := (r/M)$ zu verwenden ist, wobei M, wie bislang, der Anzahl der Rentenperioden in einem Jahr entspricht, und
- anstelle der T Rentenperioden von je einem Jahr Länge, die bei jährlichen Rentenzahlungen zu berücksichtigen wären, insgesamt $T{\cdot}M$ Zins- bzw. Rentenperioden von je $(1/M)$ Jahren Länge zu betrachten sind.

Auch hier ist wieder zwischen den beiden Unterfällen der nachschüssigen und der vorschüssigen Rentenzahlung zu unterscheiden.

Unterjährliche Rentenzahlungen

Variante 2: Unterjährlich-nachschüssige Zinsberechnung mit gleich langer Zins- und Rentenperiode

Unterfall 1: Unterjährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Der Rechengang zur Herleitung der Rentenbarwerte bzw. Rentenendwerte folgt genau dem gleichen Prinzip wie im Fall der jährlich-nachschüssigen Rentenzahlungen. Darum werden hier nur die Ergebnisse wiedergegeben.

Für den Barwert B_0 der entrichteten Rentenzahlungen ergibt sich in diesem Falle:

$$B_0 = Z^{(m)} \cdot \left[\frac{\left(1+(r/M)\right)^{M \cdot T} - 1}{(r/M) \cdot \left(1+(r/M)\right)^{M \cdot T}} \right]$$

Der Endwert W_T dieser Rentenzahlungen lautet entsprechend:

$$W_T = Z^{(m)} \cdot \left[\frac{\left(1+(r/M)\right)^{M \cdot T} - 1}{(r/M)} \right]$$

Unterjährliche Rentenzahlungen

Variante 2: Unterjährlich-nachschüssige Zinsberechnung mit gleich langer Zins- und Rentenperiode

<u>Unterfall 2: Unterjährlich-vorschüssige Rentenzahlungen</u>

Der Rechengang zur Herleitung der Rentenbarwerte bzw. Rentenendwerte folgt genau dem gleichen Prinzip wie im Fall der jährlich-vorschüssigen Rentenzahlungen. Darum werden hier nur die Ergebnisse wiedergegeben.

Für den Barwert B_0 der entrichteten Rentenzahlungen ergibt sich in diesem Falle:

$$B_0 = Z^{(m)} \cdot \left[\frac{\left(1+(r/M)\right)^{T \cdot M} - 1}{(r/M) \cdot \left(1+(r/M)\right)^{T \cdot M - 1}} \right]$$

Der Endwert W_T dieser Rentenzahlungen lautet entsprechend:

$$W_T = Z^{(m)} \cdot \left(1+(r/M)\right) \cdot \left[\frac{\left(1+(r/M)\right)^{T} - 1}{r/M} \right]$$

Gliederung

Teil II: Rentenrechnung

- Definitionen

Jährliche Rentenzahlungen

- Jährlich-vorschüssige Rentenzahlungen
- Jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen

Unterjährliche Rentenzahlungen

- Variante 1: Jährlich-nachschüssige Zinsberechnung
- Variante 2: Unterjährlich-nachschüssige Zinsberechnung mit gleich langer Zins-und Rentenperiode

Ewige Renten

Ewige Renten

Eine ewige Rente ist eine Gesamtheit von Zahlungen, die in konstanter Höhe periodisch wiederkehren und und eine unbegrenzte Laufzeit haben.

Offensichtlich ist eine solche Rente nur denkbar, wenn den einzelnen Rentenraten ein Kapitalbestand zugrunde liegt, der durch die Rentenzahlungen nicht vermindert wird, die Rentenraten also ausschließlich aus Zinsen auf diesen Kapitalbestand bestehen.

Der Endwert einer ewigen Rente ist unendlich groß. Daher kann in diesem Zusammenhang lediglich der Barwert B_∞ der ewigen Rente und ihre jeweilige Rentenrate Z in sinnvoller Weise untersucht werden.

Zur Vereinfachung wird hier nur der Fall jährlicher, nachschüssiger Verzinsung und Rentenzahlung betrachtet und von einer zinseszinslichen Verzinsung ausgegangen.

Barwert einer ewigen Rente

Gemäß der allgemeinen Formel für den Barwert einer Zahlungsreihe lässt sich der Barwert B_0 der ewigen Rente in Abhängigkeit von der Höhe der Rentenrate Z sowie dem zugrundeliegenden Zinssatz r schreiben als

$$B_0 = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{Z}{(1+r)^t}$$

Durch „Ausklammern“ von Z ergibt sich

$$B_0 = Z \cdot \sum_{t=1}^{\infty} (1+r)^{-t}$$

Barwert einer ewigen Rente

Daraus folgt, dass sich der Ausdruck

$$B_0 - (1+r)^{-1} \cdot B_0$$

wie folgt schreiben lässt:

$$
\begin{aligned}
B_0 - (1+r)^{-1} \cdot B_0 \; = & \\
& \left[Z \cdot (1+r)^{-1} + Z \cdot (1+r)^{-2} + Z \cdot (1+r)^{-3} + \ldots \right] \\
& - (1+r)^{-1} \left[Z \cdot (1+r)^{-1} + Z \cdot (1+r)^{-2} + Z \cdot (1+r)^{-3} + \ldots \right] \\
= & \\
& \left[Z \cdot (1+r)^{-1} + Z \cdot (1+r)^{-2} + Z \cdot (1+r)^{-3} + \ldots \right] \\
& - \left[Z \cdot (1+r)^{-2} + Z \cdot (1+r)^{-3} + Z \cdot (1+r)^{-4} + \ldots \right]
\end{aligned}
$$

Barwert einer ewigen Rente

Auf der rechten Seite heben sich alle Summanden bis auf den ersten auf. Es gilt also

$$B_0 - (1+r)^{-1} \cdot B_0 = Z \cdot (1+r)^{-1}$$

oder

$$B_0 \cdot \frac{(1+r)}{(1+r)} - B_0 \cdot \frac{1}{(1+r)} = Z \cdot \frac{1}{(1+r)}$$

oder

$$B_0 \cdot \frac{r}{(1+r)} = Z \cdot \frac{1}{(1+r)}$$

und folglich

$$B_0 = \frac{Z}{r}$$