# Einführung in die finanzmathematische Analyse von Anleihen und Zinsswaps

# Grundlegende Begriffe und Sachverhalte

Eine Anleihe ist ein Wertpapier, durch dessen Ausgabe sich der Emittent (= das Wirtschaftssubjekt, das dieses Wertpapier ausgibt) bei dem jeweiligen Besitzer verschuldet.

Der Emittent der Anleihe erhält deren Ausgabepreis in Form von Geld und nimmt im Austausch hierfür die Verpflichtung auf sich, eine Abfolge von Zahlungen (Zinsen und Tilgung) an den Besitzer der Anleihe zu leisten.

Die Höhe und zeitliche Verteilung dieser Zahlungen müssen nicht notwendigerweise schon bei Ausgabe der Anleihe bekannt sein. Es gibt auch Fälle, in denen nur der Berechnungsmodus für diese Zahlungen in den Anleihebedingungen festgelegt worden ist, die konkrete Höhe und zeitliche Verteilung aber z.B. davon abhängig ist, wie sich bestimmte, nicht im voraus bekannte Marktdaten entwickeln.

# Behandelte Anleihearten

Aus der Vielzahl möglicher Anleihearten werden hier nur drei näher behandelt:

- **Festverzinsliche Anleihen:** Anleihen, die am Ende jeder Zinsperiode einen festen Prozentsatz des Nominalwertes als Zinszahlung ausschütten, und bei Beendigung ihrer (vorab festgelegten) Laufzeit durch die Zahlung des Nominalwertes an den jeweiligen Besitzer getilgt werden.
- **Variabel verzinsliche Anleihen** (engl. „floating rate notes“ oder einfach „floater“): Anleihen, bei denen die Höhe der am Ende jeder Zinsperiode zu entrichtenden Zinszahlung im Zeitverlauf variiert. Oftmals richtet sich die Höhe der jeweils zu entrichtenden Zinszahlung nach einem am Markt beobachtbaren Referenzzinssatz, zuzüglich einer (von den Gegebenheiten des Einzelfalls abhängigen) Marge. Als Referenzzinssatz dient häufig der LIBOR (= London Interbank Offered Rate), ein aus Marktdaten abgeleiteter Orientierungswert für die Verzinsung kurzfristiger Kredite im Interbankengeschäft (bei sehr guter Bonität des Kreditnehmers). Auch variabel verzinste Anleihen werden am Ende ihrer Laufzeit durch Zahlung des Nennbetrags an den Anleihebesitzer getilgt.

# Behandelte Anleihearten

- **<u>Nullkupon-Anleihen</u>** (engl.: zero-coupon bonds oder einfach zerobonds): Anleihen, bei denen lediglich eine Zahlung des Nennwertes am Ende der Laufzeit vorgenommen wird, aber keine Zinszahlungen erfolgen. Zerobonds beziehen ihre Attraktivität für Investoren daraus, dass sie zu einem deutlich unter dem Nennwert liegenden Ausgabepreis emittiert werden und den jeweiligen Käufer dadurch in die Lage versetzen, von der Wertsteigerung der Anleihe bis zum Laufzeitende zu profitieren.

**Anmerkung:**

In Anlehnung an einen international weit verbreiteten Sprachgebrauch werden hier und im folgenden die von einer Anleihe ausgeschütteten periodischen Zinszahlungen auch als Kuponzahlungen und der ihnen zugrundeliegende Zinssatz als die Kuponrate (engl: coupon rate) bezeichnet.

# Vereinfachende Annahmen

Im Rahmen dieser einführenden Darstellung wird von den folgenden vereinfachenden Prämissen ausgegangen:

- Die Länge einer Zinsperiode (also des Zeitraums zwischen zwei aufeinander folgenden Kuponzahlungen) betrage stets genau ein Jahr; es finden also keine unterjährigen Kuponzahlungen statt.
- Die Bewertung einer Anleihe erfolge stets am Anfang einer Zinsperiode; d.h. die (Rest-)Laufzeit einer zu bewertenden Anleihe, gemessen in Jahren, sei stets ganzzahlig. Diese Annahme führt dazu, dass anteilige Zinserträge, die auf den Zeitraum zwischen dem Beginn der jeweils aktuellen Zinsperiode und dem Bewertungszeitpunkt entfallen würden, vernachlässigt werden können.
- Das Risiko, dass ein Emittent seine Zahlungsverpflichtungen ganz oder teilweise nicht (bzw. nicht termingerecht) erfüllt, sei vernachlässigbar. Diese Annahme gilt im allgemeinen bei öffentlichen Anleihen aus einer Reihe führender Industrienationen (USA, GB, D, F, NL, ...) als erfüllt. Sie dürfte aber z.B. auf viele Schwellenländer (Uruguay, Brasilien, Mexiko, ...) und auch auf eine Vielzahl von Unternehmen nicht zutreffen.

# Vereinfachende Annahmen

- Ferner wird angenommen, dass beim Verkauf oder Kauf eines Wertpapiers keine Transaktionskosten (wie z.B. Maklergebühren) entstehen, und dass zu jedem in Frage kommenden Zeitpunkt eine beliebige Stückzahl eines gegebenen Wertpapiers zu einem einheitlichen Marktpreis ge- oder verkauft werden kann.

- Steuern oder Abgaben auf Zinserträge und/oder Kursgewinne werden als nicht existent betrachtet.

# Die Effektivverzinsung als Rentabilitätsmaß

**Definition:** Die Effektivverzinsung einer Anleihe entspricht demjenigen Diskontierungsfaktor *i*, bei dessen Verwendung der Barwert aller zukünftigen Kupon- und Tilgungszahlungen, die von dieser Anleihe ausgehen, genau mit dem aktuellen Kurswert dieser Anleihe übereinstimmt.

Die Effektivverzinsung ist also diejenige Größe *i*, welche die folgende Bedingung erfüllt:

$$P(T) \;=\; \sum_{t=1}^{T} (1+i)^{-t} \cdot c(T) \cdot F \;+\; (1+i)^{-T} F$$

Hier bezeichnet

- *P(T)* den aktuellen Marktpreis der festverzinslichen Anleihe mit *T*-jähriger Restlaufzeit
- F den Nennwert der Anleihe und
- *c(T)* die Kuponrate, d.h. die als Bruchteil des Nennwerts ausgedrückte, konstante jährliche Kuponzahlung bei unterstellten *T* Jahren Restlaufzeit

# Die Effektivverzinsung als Rentabilitätsmaß

Hier eine Beispielrechnung für die **Effektivverzinsung einer verzinslichen Anleihe mit zweijähriger Restlaufzeit**:

Es gilt in diesem Falle:

$$P(2) = \frac{c(2)\cdot F}{(1+i)} + \frac{(1+c(2))\cdot F}{(1+i)^2}$$

beide Seiten $\cdot\,(1+i)^2 \,/\, P(2)$ und umstellen

$$(1+i)^2 - \frac{c(2)}{P(2)}\cdot F\cdot(1+i) - \frac{(1+c(2))\cdot F}{P(2)} = 0$$

Anwendung der p/q-Formel:

$$(1+i)_{1,2} = \frac{c(2)}{2\cdot P(2)}\cdot F \pm \sqrt{\frac{c(2)^2 F^2}{4\cdot P(2)^2} + \frac{(1+c(2))\cdot F}{P(2)}} = 0$$

# Die Effektivverzinsung als Rentabilitätsmaß

Wenn $c(2) \geq 0$ ist (was aus ökonomischen Gründen zutrifft), gilt auf jeden Fall

$$\sqrt{\frac{c(2)^2 F^2}{4 \cdot P(2)^2} + \frac{(1 + c(2)) \cdot F}{P(2)}} \geq \frac{c(2)}{2 \cdot P(2)} \cdot F$$

Ökonomisch plausibel sind aber über 0 liegende Werte von (1+i).
Folglich gilt für die Effektivverzinsung einer festverzinslichen Anleihe **mit zweijähriger Restlaufzeit**:

$$i = \frac{c(2)}{2 \cdot P(2)} \cdot F + \sqrt{\frac{c(2)^2 F^2}{4 \cdot P(2)^2} + \frac{(1 + c(2)) \cdot F}{P(2)}} - 1$$

# Die Effektivverzinsung als Rentabilitätsmaß

Für $c(T) > 0$ und $T > 2$ lässt sich die Effektivverzinsung $i$ nicht analytisch („formelmäßig") ermitteln, kann aber numerisch (d.h. mit Hilfe eines automatisierbaren Suchverfahrens) mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden

**Wie verlässlich ist die Effektivverzinsung als Rentabilitätsmaß?**

Der Effektivverzinsung als Rentabilitätskennziffer liegt die Annahme zugrunde, dass vor dem Laufzeitende anfallende Kuponzahlungen zum Effektivzinssatz wieder angelegt werden können. **Diese Annahme muss angesichts der beobachtbaren Variabilität tatsächlicher Marktzinssätze als unrealistisch gelten.**

Dieses Problem tritt nur bei **Zerobonds** nicht auf, denn bei dieser Anleiheart leistet der Emittent vor Ende der Laufzeit keine Zahlungen an den Anleihebesitzer.

Bei Nullkuponanleihen kann die Effektivverzinsung also als ein realistisches Rentabilitätsmaß gelten.

# Die Effektivverzinsung als Rentabilitätsmaß

Im Falle einer **Nullkuponanleihe** fallen vor dem Laufzeitende keinerlei Kuponzahlungen an; es gilt also *c(T) = 0.* Der Zusammenhang zwischen der Effektivverzinsung $i_{c(T)=0}$ einer Nullkuponanleine mit T-jähriger Restlaufzeit, ihrem Nennbetrag *F* und ihrem aktuellen Marktpreis $P(T)_{c(T)=0}$ lässt sich daher wie folgt darstellen:

$$P(T)_{c(T)=0} \cdot (1 + i_{c(T)=0})^T \;=\; F$$

Diese Gleichung lässt sich (mittels Division beider Seiten durch *P*, Ziehung der *T*ten Wurzel und Subtraktion von 1 auf beiden Seiten) analytisch nach i auflösen.

Folglich ergibt sich als **Effektivverzinsung einer Nullkuponanleihe**

$$i_{c(T)=0} = \left( \frac{F}{P(T)_{c(T)=0}} \right)^{1/T} - 1$$

# Kassa- und Terminzinssätze

**Definitionen:**

- Der im Zeitpunkt $t$=0 vorherrschende Kassazinssatz (engl.: spot interest rate) für eine Laufzeit von $T$ Jahren (im folgenden: $r_{0,T}$) entspricht der internen Rendite einer Nullkuponanleihe mit Restlaufzeit $T$, gerechnet vom jeweils aktuellen Zeitpunkt ($t$=0) an

- Der Terminzinssatz (engl.: forward interest rate) für einen (in der Zukunft liegenden) Anlagezeitpunkt $t$ und eine Anlagedauer von $T$-$t$ Jahren entspricht der Effektivverzinsung einer zum Zeitpunkt $t$ getätigten Investition in eine Nullkuponanleihe, die zu diesem Zeitpunkt noch eine verbleibende Laufzeit von $T$-$t$ Jahren hat. Dieser Terminzinssatz wird im folgenden mit dem Symbol $f_{t,T}$ bezeichnet.

**Achtung:** Entspricht der Anlagezeitpunkt dem aktuellen Datum, so sind Kassa- und Terminzinssatz identisch; d.h. es gilt

$$r_{0,T} = f_{0,T}$$

# Kassa- und Terminzinssätze

**Nachfolgend betrachten wir zwei alternative Anlagen mit identischen Anlagebetrag und gleicher Laufzeit:**

•**Alternative (1):** Investition des Anlagebetrages $A_0$ in eine Nullkuponanleihe mit $N$ Jahren Restlaufzeit.

$$\text{Mittelzufluss am Ende von Jahr } N = A_0 \cdot (1+r_{0,N})^N$$

•**Alternative (2):** Investition des Anlagebetrages $A_0$ in eine Nullkuponanleihe mit $m$ ($< N$) Jahren Laufzeit. Nach diesen $m$ Jahren sofortige Wiederanlage des Tilgungs-betrages für die restlichen $N$-$m$ Jahre zum Terminzinssatz $f_{m,N}$

$$\text{Mittelzufluss am Ende von Jahr } N = A_0 \cdot (1+r_{0,m})^{m} \cdot (1+f_{m,N})^{N-m}$$

# Kassa- und Terminzinssätze

Beide Alternativen führen zu gleichartigen Zahlungsströmen für den Anleger: Anlage von $A_0$, Tilgung nach $N$ Jahren, keine zwischenzeitlichen Zahlungsströme. Transaktionskosten, Insolvenzrisiken und andere Marktunvollkommenheiten wurden als vernachlässigbar unterstellt.

**Folglich müssen die beiden Anlageformen auch zu den gleichen Mittelzuflüssen am Laufzeitende führen.** Es muss also gelten:

$$A_0 \cdot (1+r_{0,N})^N = A_0 \cdot (1+r_{0,m})^{m} \cdot (1+f_{m,N})^{N-m}$$

oder:

$$\frac{(1+r_{0,N})^N}{(1+r_{0,m})^m} = (1+f_{m,N})^{N-m}$$

oder:

$$f_{m,N} = \left( \frac{(1+r_{0,N})^N}{(1+r_{0,m})^m} \right)^{\frac{1}{N-m}} - 1$$

# Kassa- und Terminzinssätze

Für $N$ = 2 und $m$ = 1 gilt

$(1+r_{0,2})^2 = (1+r_1).(1+f_{1,2})$ und folglich $$f_{1,2} = \left(\frac{(1+r_{0,2})^2}{(1+r_{0,1})}\right) - 1$$

Für $N$ = $T$ und $m$ = $T$-1 gilt

$(1+r_{0,T})^T = (1+r_{0,T-1})^{T-1}.(1+f_{T-1,T})$ und folglich $$f_{T-1,T} = \left(\frac{(1+r_{0,T})^T}{(1+r_{0,T-1})^{T-1}}\right) - 1$$

# Kassa- und Terminzinssätze

Wir setzen nun nacheinander $T = 2, 3, ..., N$ und erhalten

$(1+r_{0,2})^2 = (1+r_{0,1}).(1+f_{1,2})$

$(1+r_{0,3})^3 = (1+r_{0,2})^2 \cdot (1+f_{2,3})$
$= (1+r_{0,1}) \cdot (1+f_{1,2}) \cdot (1+f_{2,3})$ wegen obiger Gleichung für $(1+r_{0,2})^2$

$(1+r_{0,4})^4 = (1+r_{0,3})^3 \cdot (1+f_{3,4})$
$= (1+r_{0,2})^2 \cdot (1+f_{2,3}) \cdot (1+f_{3,4})$
$= (1+r_{0,1}) \cdot (1+f_{1,2}) \cdot (1+f_{2,3}) \cdot (1+f_{3,4})$

Daraus ergibt sich schließlich

$$(1+r_{0,N})^N = (1+r_{0,1}) \cdot \prod_{n=1}^{N-1} (1+f_{n,n+1})$$

oder

$$r_{0,N} = \left( (1+r_{0,1}) \cdot \prod_{n=1}^{N-1} (1+f_{n,n+1}) \right)^{\frac{1}{N}} - 1$$

# Kassa- und Terminzinssätze

**Alternative Schreibweise:**

$$(1+r_{0,N})^N = (1+r_{0,1})\cdot\prod_{n=2}^{N}(1+f_{n-1,n})$$

oder

$$r_{0,N} = \left((1+r_{0,1})\cdot\prod_{n=2}^{N}(1+f_{n-1,n})\right)^{\frac{1}{N}} - 1$$

# Bewertung festverzinslicher Anleihen

Jede festverzinsliche Anleihe mit Nennwert $F$, die $T$ Jahre hintereinander je einen Kuponbetrag $c(T) \cdot F$ ausschüttet und am Ende ihrer Laufzeit durch die Rückzahlung des Nennbetrages $F$ getilgt wird, lässt sich gedanklich in

- ($T$-1) Zerobonds mit Nennwert $c(T) \cdot F$ und Laufzeiten von 1, ..., $T$-1 und
- einen Zerobond mit Nennwert $(1+c(T)) \cdot F$ und einer Laufzeit von $T$

zerlegen.

Jeder einzelne dieser insgesamt $T$ fiktiven Zerobonds lässt sich bewerten, indem sein jeweiliger Nennwert anhand des für seine Laufzeit maßgeblichen Kassa-Zinssatz auf abdiskontiert wird. Der marktgerechte Preis der Anleihe insgesamt lässt sich dann als Summe der so ermittelten individuellen Werte der fiktiven Zerobonds berechnen:

$$P(T) = \sum_{t=1}^{T-1} (1+r_{0,t})^{-t} \cdot c(T) \cdot F + (1+r_{0,T})^{-T} \cdot \big(1+c(T)\big) \cdot F$$

# Herleitung von Kassa- und Terminzinssätzen

Bis hierhin wurde festgestellt, wie der marktgerechte Preis einer $T$-periodigen festverzinslichen Anleihe als Funktion der relevanten Kassa- ($r_{0,1}$, $r_{0,2}$, ..., $r_{0,T}$) bzw. Terminzinssätze ($f_{t,t+1}$ mit $t = 0, ..., T\text{-}1$ und $f_{0,1} = r_1$) ermittelt werden kann.

Häufig stellt sich die Frage aber genau umgekehrt: Die Preise $P(1)$, ..., $P(N)$ unterschiedlicher Anleihen mit verschiedenen Restlaufzeiten sind (etwa aus dem Kursteil einer Tageszeitung) bekannt, aber die ihnen zugrunde liegenden Kassa- bzw. Terminzinssätze müssen rechnerisch ermittelt werden (z.B. um als Vergleichsmaßstab für die Rentabilität anderer zur Wahl stehenden Anlageformen zu dienen).

Zur Lösung dieses Problems wird wie folgt vorgegangen:

Zunächst wird aus dem Preis $P(1)$ einer Anleihe mit einjähriger Restlaufzeit und einer jährlichen Kuponzahlung von $c(1)$ der Kassazinssatz $r_{0,1}$ hergeleitet. Es gilt:

$$P(1) = \frac{(1+c(1)) \cdot F}{(1+r_{0,1})} \quad \text{und folglich} \quad r_{0,1} = \frac{(1+c(1)) \cdot F}{P(1)} - 1$$

# Herleitung von Kassa- und Terminzinssätzen

Die Bestimmungsgleichung für den Preis einer festverzinslichen Anleihe mit einer Restlaufzeit von 2

$$P(2) = \frac{c(2)\cdot F}{(1+r_{0,1})} + \frac{(1+c(2))\cdot F}{(1+r_{0,2})^2}$$

lässt sich nach dem Kassa-Zinssatz für zwei Jahre auflösen. Es gilt:

$$r_{0,2} = \left(\frac{(1+c(2))\cdot F}{P(2) - (1+r_{0,1})^{-1}c(2)\cdot F}\right)^{\frac{1}{2}} - 1$$

Wenn, wie angenommen, zuvor $r_{0,1}$ anhand des Marktpreises für eine Anleihe mit einjähriger Restlaufzeit bestimmt worden ist, enthält die rechte Seite dieser Gleichung keine unbekannten Größen mehr. $r_{0,2}$ lässt sich also auf diesem Wege berechnen.

# Herleitung von Kassa- und Terminzinssätzen

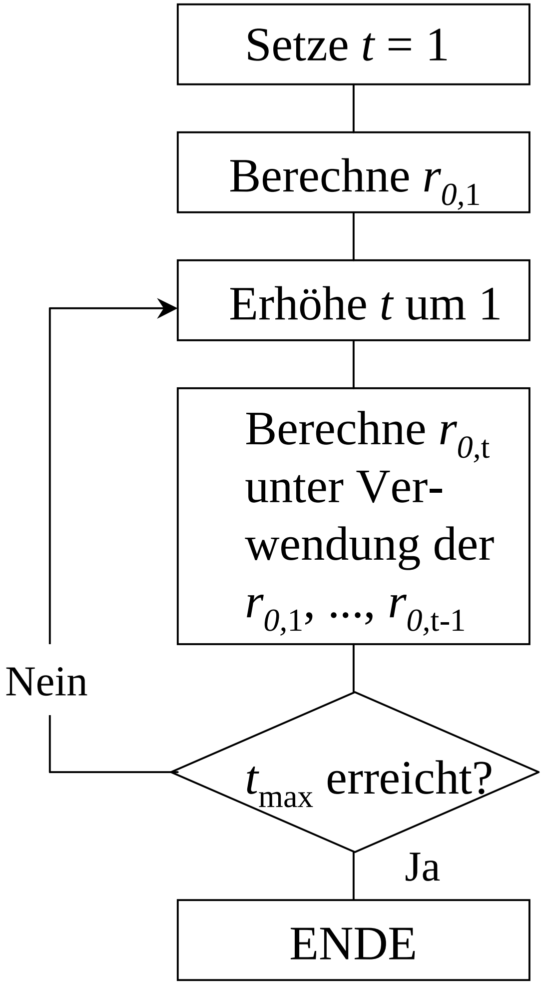
Diese Vorgehensweise lässt sich verallgemeinern. Um dies zu verdeutlichen, hier noch einmal die Formel für den marktgerechten Preis einer Anleihe mit Restlaufzeit *T*:

$$P(T) \;=\; \sum_{t=1}^{T-1}(1+r_{0,t})^{-t}\cdot c(T)\cdot F \;+\; (1+r_{0,T})^{-T}\cdot\left(1+c(T)\right)\cdot F$$

Durch Auflösung dieser Gleichung nach $r_T$ ergibt sich

$$r_{0,T} \;=\; \left(\frac{(1+c(T))\cdot F}{P(T)\;-\;c(T)\cdot F\cdot\sum_{t=1}^{T-1}(1+r_{0,t})^{-t}}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

# Herleitung von Kassa- und Terminzinssätzen




$$r_{0,1} = \frac{(1+c(1)) \cdot F}{P(1)} - 1$$

$$r_{0,T} = \left( \frac{(1+c(T)) \cdot F}{P(T) - c(T) \cdot F \cdot \sum_{t=1}^{T-1} (1+r_{0,t})^{-t}} \right)^{\frac{1}{T}} - 1$$

# Bewertung variabel verzinslicher Anleihen

Eine zentrale Eigenschaft variabel verzinslicher Anleihen ist es, dass die Höhe der auf sie entfallenden Kuponzahlungen im Zeitpunkt der Bewertung zum Teil noch unbekannt sind. Das zur Bewertung festverzinslicher Anleihen herangezogene Verfahren kann daher auf den Fall variabel verzinslicher Anleihen nicht übertragen werden.

Statt dessen müssen wir zwei **zusätzliche, vereinfachende Annahmen** treffen:

- Annahme 1: Wenn die Höhe der von einem Wertpapier ausgehenden Zahlungsströme zum Bewertungszeitpunkt ganz oder zum Teil noch unbekannt sind, so entspricht der (rechnerische) Wert dieses Wertpapiers dem Barwert der erwarteten Zahlungsströme, die von diesem Wertpapier ausgehen. Die Risiken (oder auch Chancen), die sich für den Eigentümer des Wertpapiers aus möglichen Abweichungen zwischen tatsächlichen und erwarteten Zahlungsströmen ergeben, sind für die Bewertung ohne Belang.
- Annahme 2: Zu jedem Zeitpunkt entspricht der beobachtete Terminzinssatz $f_{t,t+n}$ dem Bewertungszeitpunkt 0 erwarteten zukünftigen (d.h. zum Zeitpunkt $t$ vorherrschenden) Kassazinssatz für eine Restlaufzeit von $n$ Jahren. Alle Marktteilnehmer haben (bezüglich der bewertungsrelevanten Größen) identische Erwartungen.

# Bewertung variabel verzinslicher Anleihen

Im folgenden bezeichne $E_0(r_{t,t+n})$ den zum Zeitpunkt 0 für den Zeitpunkt $t$ erwarteten Kassazinssatz für eine Restlaufzeit von $n$ Jahren.

Aus Gründen der Vereinfachung werden hier nur variabel verzinsliche Anleihen betrachtet, bei denen die am Ende eines Jahres $t$ geleistete Kuponzahlung sich nach dem am Ende des Vorjahres bestehenden Ein-Jahres-Kassazinssatz $r_{t-1,t}$ richtet.

Aufgrund von Annahme 1 lässt sich der marktgerechte Preis einer so ausgestalteten, variabel verzinslichen Anleihe mit $T$ Jahren Restlaufzeit wie folgt schreiben:

$$P^{(\mathrm{var})}(T) = \sum_{t=1}^{T-1} (1+r_{0,t})^{-t} \cdot E_0(r_{t-1,t}) \cdot F + (1+r_{0,T})^{-T} \cdot \left(1+E_0(r_{T-1,T})\right) \cdot F$$

Aufgrund von Annahme 2 gilt: $E_0(\mathrm{r}_{t-1,t}) = f_{t-1,t}$ für alle $t$ und somit

$$P^{(\mathrm{var})}(T) = \sum_{t=1}^{T-1} (1+r_{0,t})^{-t} \cdot f_{t-1,t} \cdot F + (1+r_{0,T})^{-T} \cdot \left(1+f_{T-1,T}\right) \cdot F$$

# Bewertung variabel verzinslicher Anleihen

Unter Rückgriff auf den (bereits beschriebenen) Zusammenhang zwischen Kassa- und Terminzinssätzen,

$$(1+r_{0,T})^T = (1+r_{0,1})\cdot\prod_{t=2}^{T}(1+f_{t-1,t})$$

lässt sich der marktgerechte Preis einer variabel verzinslichen Anleihe mit $T$-jähriger Restlaufzeit umschreiben zu

$$P^{(\text{var})}(T) = \sum_{t=1}^{T-1}\frac{f_{t-1,t}\cdot F}{(1+r_{0,1})\cdot\prod_{s=2}^{t}(1+f_{s-1,s})} + \frac{(1+f_{T-1,T})\cdot F}{(1+r_{0,1})\cdot\prod_{s=2}^{T}(1+f_{s-1,s})}$$

Jetzt werden Zähler und Nenner des letzten Summanden jeweils durch den Term $(1+f_{T-1,T})$ dividiert.

# Bewertung variabel verzinslicher Anleihen

Es ergibt sich:

$$P^{(\text{var})}(T) = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{f_{t-1,t} \cdot F}{(1+r_{0,1}) \cdot \prod_{s=2}^{t} (1+f_{s-1,s})} + \frac{F}{(1+r_{0,1}) \cdot \prod_{s=2}^{T-1} (1+f_{s-1,s})}$$

Nun werden der vorletzte und der letzte Summand zusammengefasst:

$$P^{(\text{var})}(T) = \sum_{t=1}^{T-2} \frac{f_{t-1,t} \cdot F}{(1+r_{0,1}) \cdot \prod_{s=2}^{t} (1+f_{s-1,s})} + \frac{(1+f_{T-2,T-1}) \cdot F}{(1+r_{0,1}) \cdot \prod_{s=2}^{T-2} (1+f_{s-1,s})}$$

$$= P^{(\text{var})}(T-1)$$

# Bewertung variabel verzinslicher Anleihen

Dieser Zusammenhang gilt für alle $T \in \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Folglich gilt $$P^{(\text{var})}(T) = P^{(\text{var})}(T-1) = \ldots = P^{(\text{var})}(1)$$

$$= \frac{(1 + f_{0,1}) \cdot F}{(1 + r_{0,1})}$$

$$= F \qquad \text{wegen } f_{0,1} = r_{0,1}$$

**Unter den genannten vereinfachenden Annahmen ist also der rechnerische Wert einer variabel verzinslichen Anleihe mit ihrem Nennbetrag identisch.**

# Bewertung von Zinsswaps

**Definition und grundlegende Eigenschaften:**

- Ein Zinsswap ist ein Vertrag über den Austausch von zwei unterschiedlichen Zahlungsströmen in einer Währung während eines vorgegebenen Zeitraums.
- Üblicherweise erhält eine der beiden Vertragsparteien (der Festzinsempfänger) eine Abfolge periodischer Zahlungen, deren Höhe dem Produkt aus einer konstanten, bei Vertragsabschluss festgeschriebenen Kuponrate und dem Nennbetrag des Vertrages entspricht.
- Im Austausch hierfür geht der Festzinsempfänger die Verpflichtung zur Leistung einer Abfolge periodischer Zahlungen ein, deren Höhe sich nach dem Produkt aus einem variablen Zinssatz (z.B. LIBOR für eine bestimmte Laufzeit) und dem Nennbetrag des Vertrages entspricht.
- Bei der anderen Vertragspartei (dem Festzinszahler) verhält es sich genau umgekehrt.
- Der Nennbetrag wird nicht ausgetauscht, sondern dient nur der Berechnung der fälligen Zahlungen

# Bewertung von Zinsswaps

**Definition und grundlegende Eigenschaften (Fortsetzung):**

- Der am Ende jeder Zinsperiode vom Festzinsempfänger zu zahlende Betrag richtet sich nach dem Wert, den der variable Zinssatz unmittelbar vor Anfang der Zinsperiode hatte.
- Zahlungen, die auf den gleichen Termin fallen, werden üblicherweise saldiert; d.h. die begünstigte Vertragspartei erhält von der jeweils anderen die Differenz zwischen dem von ihr geschuldeten und dem ihr zustehenden Betrag ausgezahlt.

**Deswegen stellt sich für den Festzinsempfänger im Rahmen eines Zinsswaps die Situation genau so dar, als hätte er eine variabel verzinsliche Anleihe emittiert und eine festverzinsliche Anleihe mit identischer Laufzeit erworben.**

**Dem gegenüber ist die Situation des Festzinszahlers im Rahmen eines Zinsswaps so, als hätte er eine festverzinsliche Anleihe emittiert und eine variabel verzinsliche Anleihe mit identischer Laufzeit erworben!**

# Bewertung von Zinsswaps

**Wert des Swaps aus Sicht des Festzinszahlers =**

Marktgerechter Preis der hypothetisch emittierten Festzinsanleihe mit Nennwert *F* und Restlaufzeit *T*

—

Marktgerechter Preis der hypothetisch gekauften variabel verzinslichen Anleihe mit Nennwert *F* und Restlaufzeit *T*

=

$$\sum_{t=1}^{T-1}(1+r_{0,t})^{-t}\cdot c(T)\cdot F + (1+r_{0,T})^{-T}\cdot\left(1+c(T)\right)\cdot F$$

—

$$F$$

# Bewertung von Zinsswaps

**Wert des Swaps aus Sicht des Festzinsempfängers =**

| Marktgerechter Preis der hypothetisch emittierten variabel verzinslichen Anleihe mit Nennwert *F* und Restlaufzeit *T* | — | Marktgerechter Preis der hypothetisch gekauften Festzinsanleihe mit Nennwert *F* und Restlaufzeit *T* |
|---|---|---|

=

$$F \quad - \quad \sum_{t=1}^{T-1} (1+r_{0,t})^{-t} \cdot c(T) \cdot F + (1+r_{0,T})^{-T} \cdot \left(1+c(T)\right) \cdot F$$

# Bewertung von Zinsswaps

- In den weitaus meisten Fällen werden die festen und variablen Zinssätze, die einem Zinsswap zugrunde liegen, so gewählt, rechnerische Wert des Zinsswaps zum Zeitpunkt des Vertragsabschluss null ist.
- Während der Laufzeit eines Zinsswaps können sich jedoch die jeweils aktuellen Kassa- und Terminzinssätze so verändern, dass der Swap für eine der beiden Vertragsparteien einen positiven (und für die andere Seite einen betragsmäßig gleich hohen negativen) Wert annimmt.

# Bewertung von Zinsswaps

**Vor dem Abschluss eines Swap-Kontrakts stellt sich häufig die Frage:**

***„Welcher Festzinssatz muss in einem Zinsswap mit einer Laufzeit von T Jahren vereinbart werden, damit dieser einen rechnerischen Marktwert von null hat?"***

Die Antwort auf diese Frage beruht auf der Überlegung, dass der Wert des Zinsswaps, hier aus Sicht des Festzinszahlers, durch die folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$P_{S,Z}(T) = \sum_{t=1}^{T-1} (1+r_{0,t})^{-t} \cdot c(T) \cdot F \quad + \quad (1+r_{0,T})^{-T} \cdot \big(1+c(T)\big) \cdot F \; - \; F$$

Gesucht ist derjenige Wert $c_0(T)$ von $c(T)$, für den $P_{S,Z}(T) = 0$ wird.
Für diesen Wert $c_0(T)$ gilt also folgendes:

$$\sum_{t=1}^{T-1} (1+r_{0,t})^{-t} \cdot c_0(T) \cdot F \quad + \quad (1+r_{0,T})^{-T} \cdot \big(1+c_0(T)\big) \cdot F \; - \; F \; = \; 0$$

# Bewertung von Zinsswaps

Ausklammern con $c_0(T)$ und Division beider Seiten durch $F$ ergibt

$$c_0(T) \cdot \left( \sum_{t=1}^{T} (1+r_{0,t})^{-t} \right) + (1+r_{0,T})^{-T} - 1 = 0$$

Folglich erhalten wir für den Festzinssatz, der den Wert des Zinsswaps null werden lässt, folgenden Ausdruck:

$$c_0(T) = \frac{1-(1+r_{0,T})^{-T}}{\sum_{t=1}^{T} (1+r_{0,t})^{-t}}$$