Musterlösungen

Aufgabe 1:

a) Die Effektivverzinsung einer Nullkuponanleihe lässt sich anhand der folgenden Gleichung ermitteln:

$$i_{c(T)=0} = \left(\frac{F}{P(T)_{c(T)=0}} \right)^{1/T} - 1$$

Hier gilt

- $P(T)_{c(T)=0}$ = aktueller Marktpreis der Anleihe
- F = Nennwert der Anleihe = 1000
- $T = 4$ und folglich

$$i_{c(T)=0} = (1000/838{,}56)^{(1/4)} - 1$$
$$= 0{,}045 = \mathbf{4{,}5\ \%}$$

Musterlösungen

Aufgabe 1:

b) Der Kassazinssatz für eine Restlaufzeit von *T* Jahren ist identisch mit der Effektivverzinsung einer Nullkuponanleihe mit *T*-jähriger Restlaufzeit. Wir setzen $T = 7$. Da die Restlaufzeit von Nullkuponanleihe B genau 7 Jahren entspricht, können wir ihre Effektivverzinsung also mit dem 7 Jahres-Kassazinssatz gleichsetzen.

Zur Ermittlung der Effektivverzinsung von Anleihe B kommt wieder die bereits bekannte Formel zum Einsatz:

$$i_{c(T)=0} = \left(\frac{F}{P(T)_{c(T)=0}} \right)^{1/T} - 1$$

Für $T = 7$, $F = 100$, $P(T)_{(c(T)=0)} = 70{,}59$ ergibt sich

$$\begin{aligned} i_{c(T)=0} &= (100/70{,}59)^{(1/7)} - 1 \\ &= 0{,}051 = \mathbf{5{,}1\ \%} \end{aligned}$$

Musterlösungen

Aufgabe 1:

c) Für den Zusammenhang zwischen der Termin- und Kassazinssätzen gilt allgemein:

$$f_{m,N} = \left(\frac{(1+r_{0,N})^N}{(1+r_{0,m})^m} \right)^{\frac{1}{N-m}} - 1$$

mit

$f_{m,N}$ = Terminzinssatz für eine nach *m* Jahren erfolgende Anlage mit (*N*-*m*) Jahren Laufzeit

$r_{0,x}$ = aktueller Kassazinssatz für eine Anlage mit *x* Jahren Restlaufzeit

Aus Aufgabenteilen a) und b) wissen wir: $r_{0,7} = 0{,}051$ und $r_{0,4} = 0{,}045$.

Also gilt

$$f_{4,7} = \left(\frac{(1+0{,}051)^7}{(1+0{,}045)^4} \right)^{\frac{1}{7-4}} - 1 = 0{,}0591 = 5{,}91\%$$

Musterlösungen

Aufgabe 1:

d) Der Effektivverzinsung als Rentabilitätskennziffer liegt die Annahme zugrunde, dass vor dem Laufzeitende anfallende Kuponzahlungen zum Effektivzinssatz wieder angelegt werden können. Diese Annahme muss angesichts der beobachtbaren Variabilität tatsächlicher Marktzinssätze als unrealistisch gelten.

Dieses Problem tritt nur bei Zerobonds nicht auf, denn bei dieser Anleiheart leistet der Emittent vor Ende der Laufzeit keine Zahlungen an den Anleihebesitzer.

Bei Nullkuponanleihen kann die Effektivverzinsung also als ein realistisches Rentabilitätsmaß gelten.

Musterlösungen

Aufgabe 2:

Zwischen dem Kassazinssatz für eine Restlaufzeit von einem Jahr $r_{0,1}$, dem marktgerechten Preis einer Anleihe mit einjähriger Restlaufzeit P(1), dem Nennbetrag *F* dieser Anleihe und der Kuponrate *c(1)* besteht der folgende Zusammenhang:

$$P(1) = \frac{(1 + c(1)) \cdot F}{(1 + r_{0,1})}$$

Im Beispiel gilt

$$\begin{aligned} c(1) &= 3{,}2\% = 0{,}032, \\ r_{0,1} &= 5{,}6\% = 0{,}056, \\ F &= 1000 \end{aligned}$$

und folglich

$$P(1) = 1{,}032 \cdot 1000/1{,}056 = 977{,}27$$

Musterlösungen

Aufgabe 3:

a) Allgemein gilt für den marktgerechten Preis einer Anleihe

$$P(T) = \sum_{t=1}^{T-1} (1+r_{0,t})^{-t} \cdot c(T) \cdot F + (1+r_{0,T})^{-T} \cdot \big(1+c(T)\big) \cdot F$$

Hier gilt $T = 2$, also

$$P(2) = \frac{c(2)}{(1+r_{0,1})} \cdot F + \frac{1+c(2)}{(1+r_{0,2})^2} \cdot F$$

Außerdem sind laut Aufgabenstellung $c(2) = 0{,}06$, $F = 100$ und $r_{0,1} = 0{,}056$.

Musterlösungen

Aufgabe 3:

a) (fortgesetzt)

Zwischen dem Einjahres-Kassazinssatz $r_{0,1}$ und dem Kassazinssatz für eine Restlaufzeit von zwei Jahren $r_{0,2}$ besteht der folgende Zusammenhang:

$$r_{0,2} = \left((1+r_{0,1})\cdot(1+f_{1,2})\right)^{1/2} - 1$$

Also gilt in diesem Beispiel:

$$r_{0,2} = \sqrt{\left((1+0{,}056)\cdot(1+0{,}041)\right)} - 1 = 0{,}0485 = 4{,}85\%$$

Musterlösungen

Aufgabe 3:

a) (fortgesetzt):

Damit stehen alle Einflussgrößen für die Bewertung der Anleihe zur Verfügung

Es gilt: $$P(2) = \frac{c(2)}{(1+r_{0,1})} \cdot F + \frac{1+c(2)}{(1+r_{0,2})^2} \cdot F$$

mit $T = 2$, $c(2) = 0{,}06$, $F = 100$, $r_{0,1} = 0{,}056$ und $r_{0,2} = 0{,}0485$
wie eben berechnet. Also:

$$P(2) = \frac{6}{1{,}056} + \frac{106}{1{,}0485^2} = 102{,}10$$

Musterlösungen

Aufgabe 3:

b) Effektivverzinsung der Anleihe aus Aufgabenteil a)

Die Effektivverzinsung einer Anleihe entspricht demjenigen Diskontierungsfaktor *i*, bei dessen Verwendung der Barwert aller zukünftigen Kupon- und Tilgungs-zahlungen, die von dieser Anleihe ausgehen, genau mit dem aktuellen Kurswert dieser Anleihe übereinstimmt.

Die Effektivverzinsung ist also diejenige Größe *i*, welche die folgende Bedingung erfüllt:

$$P(T) = \sum_{t=1}^{T} (1+i)^{-t} \cdot c(T) \cdot F + (1+i)^{-T} F$$

Hier gilt $T = 2$, $c(2) = 0{,}06$, $F = 100$ und, laut Aufgabenteil a), ´P(2) = 102,10. Also

$$102{,}10 = \frac{6}{(1+i)} + \frac{106}{(1+i)^2}$$

Musterlösungen

Aufgabe 3:

b) (fortgesetzt)

Multiplikation beider Seiten mit $(1+i)^2$ und Umformung ergibt

$$102{,}10 \cdot (1+i)^2 - 6(1+i) - 106 = 0$$

bzw.:

$$(1+i)^2 - \frac{6}{102{,}10} \cdot (1+i) - \frac{106}{102{,}10} = 0$$

Durch Anwendung der p/q-Formel erhalten wir

$$(1+i)_{1/2} = \frac{3}{102{,}10} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{102{,}10}\right)^2 + \frac{106}{102{,}10}} = 0$$

Musterlösungen

Aufgabe 3:

b) (fortgesetzt)

Also

$$i_1 = \frac{3}{102{,}10} + \sqrt{\left(\frac{3}{102{,}10}\right)^2 + \frac{106}{102{,}10}} - 1 = 0{,}0487 = 4{,}87\%$$

Die zweite rechnerische Lösung

$$i_2 = \frac{3}{102{,}10} - \sqrt{\left(\frac{3}{102{,}10}\right)^2 + \frac{106}{102{,}10}} - 1 = -0{,}01$$

ist ökonomisch ohne Belang.

Musterlösungen

Aufgabe 3:

c) Wie verlässlich ist die Effektivverzinsung als Rentabilitätsmaß?

Der Effektivverzinsung als Rentabilitätskennziffer liegt die Annahme zugrunde, dass vor dem Laufzeitende anfallende Kuponzahlungen zum Effektivzinssatz wieder angelegt werden können. **Diese Annahme muss angesichts der beobachtbaren Variabilität tatsächlicher Marktzinssätze als unrealistisch gelten.**

Dieses Problem tritt nur bei **Zerobonds** nicht auf, denn bei dieser Anleiheart leistet der Emittent vor Ende der Laufzeit keine Zahlungen an den Anleihebesitzer.

Bei Nullkuponanleihen kann die Effektivverzinsung also als ein realistisches Rentabilitätsmaß gelten.

d) Der Kassazinssatz für eine Restlaufzeit von 2 Jahren wurde bereits unter Aufgabenteil a) mit 4,85% ermittelt.

Musterlösungen

Aufgabe 4:

Zwischen den Kassa-Zinssätzen $r_{0,N}$ bzw. $r_{0,m}$ für Laufzeiten von N bzw. m Jahren (mit $m<N$) sowie dem Terminzinssatz für eine nach m Jahren beginnende Anlage mit $(N\text{-}m)$jähriger Laufzeit besteht der folgende Zusammenhang:

$$\frac{(1+r_{0,N})^N}{(1+r_{0,m})^m} = (1+f_{m,N})^{N-m}$$

Gemäß der Aufgabenstellung setzen wir nun $N = 4$ und $m = 3$. Außerdem gilt in diesem Beispiel $r_{0,3} = 0{,}025$ und $f_{m,N} = 0{,}012$. Einsetzen in die obige Gleichung ergibt

$$\frac{(1+r_{0,4})^4}{(1{,}025)^3} = (1{,}012)^{4-3}$$

oder

$$(1+r_{0,4})^4 = 1{,}012\cdot(1{,}025)^3$$

oder

$$r_{0,4} = \left[1{,}012\cdot(1{,}025)^3\right]^{1/4} - 1 = 0{,}0217 = 2{,}17\%$$

Musterlösungen

Aufgabe 5:

Die Lösung dieser Aufgabe beruht auf der Überlegung, dass der Wert des Zinsswaps, hier aus Sicht des Festzinszahlers, durch die folgende Gleichung beschrieben werden kann:

$$P_{S,Z}(T) = \sum_{t=1}^{T-1} (1+r_{0,t})^{-t} \cdot c(T) \cdot F + (1+r_{0,T})^{-T} \cdot \left(1+c(T)\right) \cdot F - F$$

Gesucht ist derjenige Wert $c_0(T)$ von $c(T)$, für den $P_{S,Z}(T) = 0$ wird.
Für diesen Wert $c_0(T)$ gilt also folgendes:

$$\sum_{t=1}^{T-1} (1+r_{0,t})^{-t} \cdot c_0(T) \cdot F + (1+r_{0,T})^{-T} \cdot \left(1+c_0(T)\right) \cdot F - F = 0$$

Ausklammern con $c_0(T)$ und Division beider Seiten durch F ergibt

$$c_0(T) \cdot \left(\sum_{t=1}^{T} (1+r_{0,t})^{-t} \right) + (1+r_{0,T})^{-T} - 1 = 0$$

Musterlösungen

Aufgabe 5 (fortgesetzt)**:**

Folglich erhalten wir für den Festzinssatz, der den Wert des Zinsswaps null werden lässt, folgenden Ausdruck:

$$c_0(T) = \frac{1-(1+r_{0,T})^{-T}}{\sum_{t=1}^{T}(1+r_{0,t})^{-t}}$$

In der Aufgabenstellung gilt $T = 3$. Außerdem ist $r_{0,1} = 0{,}018$ vorgegeben. $r_{0,2}$ und $r_{0,3}$ müssen anhand der Vorgaben i) und iii) ermittelt werden.

Zunächst $r_{0,2}$: Zwischen dem Einjahres-Kassazinssatz $r_{0,1}$, dem Terminzinssatz für eine in einem Jahr beginnende, einjährige Anlage $f_{1,2}$ und dem Kassazinssatz für eine Restlaufzeit von zwei Jahren $r_{0,2}$ besteht der folgende Zusammenhang:

$$r_{0,2} = \left((1+r_{0,1})\cdot(1+f_{1,2})\right)^{1/2} - 1$$

Musterlösungen

Aufgabe 5 (fortgesetzt)**:**

Laut Aufgabenstellung gilt $r_{0,1}$ = 0,018 und $f_{1,2}$ = 0,029; also ergibt sich

$$r_{0,2} = (1{,}018 \cdot 1{,}029)^{1/2} - 1 = 0{,}0235 = 2{,}35\%$$

Zur Ermittlung von $r_{0,3}$ kann die in Punkt i) getroffene Aussage über den aktuellen Marktpreis eines Zerobonds mit drei Jahren Laufzeit (= 89,67) herangezogen werden. Zwischen dem Marktpreis eines Zerobonds mit T Jahren Restlaufzeit $P(T)_{c(T)=0}$, seinem Nennbetrag F und dem Kassazinssatz für eine Restlaufzeit von T Jahren besteht der folgende Zusammenhang:

$$P(T)_{c(T)=0} = \frac{F}{(1+r_T)^T}$$

Musterlösungen

Aufgabe 5 (fortgesetzt)**:**

Auflösung nach $r_{0,T}$ ergibt:

$$r_{0,T} = \left(\frac{F}{P(T)_{c(T)=0}} \right)^{1/T} - 1$$

Hier gilt T=3, F = 100 und $P(T)_{c(T)=0}$ = 89,67. Also

$$r_{0,3} = \left(\frac{100}{89,67} \right)^{1/3} - 1 = 0,037 = 3,7\%$$

Musterlösungen

Aufgabe 5 (fortgesetzt)**:**

Nun sind alle Größen für die Ermittlung des Festzinssatzes $c_0(T)$, der den Wert des Zinsswaps null werden lässt, erforderlichen Größen bekannt.

Es gilt allgemein:

$$c_0(T) = \frac{1-(1+r_{0,T})^{-T}}{\sum_{t=1}^{T}(1+r_{0,t})^{-t}}$$

Unter Verwendung des vorgegebenen $r_{0,1} = 0{,}018$ und der berechneten Werte $r_{0,2} = 0{,}0235$ und $r_{0,3} = 0{,}037$ ergibt sich

$$c_0(3) = \frac{1-(1{,}037)^{-3}}{1{,}018^{-1}+1{,}0235^{-2}+1{,}037^{-3}}$$

$$= \frac{0{,}1033}{0{,}9823+0{,}9546+0{,}8967} = 0{,}03645 = 3{,}645\,\%$$