Übungsaufgaben zur Einführung in die Finanzmathematik

Übungsaufgaben

Aufgabe 1:

A hat B am 1.1.1995 einen Betrag von EUR 650,- geliehen. B verpflichtet sich, den geliehenen Betrag mit 7% einfach zu verzinsen und ihn zusammen mit den bis dahin fällig gewordenen Zinsen am 31.12.2004 zurückzuzahlen. Wie hoch ist der zurückzuzahlende Betrag?

Aufgabe 2:

Ein Betrag von EUR 1200,- war zu 5% bei einfacher Verzinsung angelegt und ist, zusammen mit den angefallenen Zinsen, auf derzeit EUR 1620 angewachsen. Wie viele Jahre war der Betrag angelegt?

Übungsaufgaben

Aufgabe 3:

Ein Betrag von EUR 3200 war 8 Jahre lang bei einfacher Verzinsung angelegt und ist in diesem Zeitraum einschließlich der gezahlten Zinsen auf EUR 4736 angewachsen. Wie hoch war der zugrunde liegende Zinssatz r?

Aufgabe 4:

Bei wieviel Prozent jährlicher Verzinsung verdreifacht sich das eingesetzte Anlagebetrag in 10 Jahren, wenn eine Verzinsung mit Zinseszinsen unterstellt wird?

Aufgabe 5:

In wie vielen Jahren verdreifacht sich ein Anlagebetrag bei 5,37% Jahreszins, wenn eine Verzinsung mit Zinseszinsen unterstellt wir?

Übungsaufgaben

Aufgabe 6:

Welchen Barwert hat eine in genau 11 Jahren erfolgende Zahlung von EUR 6 000 bei einem unterstellten Zinssatz von 8% p.a. und jährlicher Verzinsung mit Zinseszinsen?

Aufgabe 7:

Ein Kaufmann rechnet damit,

- in genau einem Jahr durch den Verkauf von Immobilie A einen Betrag von EUR 225 000 zu erlösen, und
- in genau vier Jahren durch den Verkauf von Immobilie B einen Betrag von EUR 410 000 zu erlösen.

Gehen Sie davon aus, dass sich die Erwartungen des Kaufmanns genau erfüllen. Welchen Barwert hat die Gesamtheit dieser beiden Zahlungen, wenn der Berechnung ein Zinssatz von 4% p.a. zugrunde liegt, bei jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen?

Übungsaufgaben

Aufgabe 8:

Für kurzfristige Festgeldanlagen gewährt die XYZ-Bank einen Zinssatz von 0,3% pro Monat bei einfacher Verzinsung. Eine Privatanlegerin möchte EUR 81 000 für 40 Tage anlegen. Welcher Betrag wird der Anlegerin am Ende der Laufzeit zurückgezahlt?

Hinweis: Gehen Sie zur Vereinfachung davon aus, dass die Gleichsetzung
1 Jahr = 360 Tage bei der Zinsberechnung Anwendung findet.

Aufgabe 9:

Ein Kaufmann gewährt einem seiner Angestellten zur Überbrückung eines kurzfristigen finanziellen Engpasses ein Darlehen in Höhe von EUR 800 zu einem Zinssatz von 0,02% pro Tag bei einfacher Verzinsung. Welchen Betrag zahlt der Angestellte nach 45 Tagen zurück?

Hinweis: Gehen Sie davon aus, dass die Länge eines Jahres zur Vereinfachung mit 360 Tagen gleichgesetzt wird.

Übungsaufgaben

Aufgabe 10:

Ein Betrag von EUR 800 wird für vier Jahre mit Zinseszinsen angelegt. Es findet eine monatliche Verzinsung mit einem Zinssatz von 0,6% statt.

a) Auf welchen Betrag ist der Anlagebetrag am Ende des Anlagezeitraums angewachsen?

b) Wie hoch ist der effektive Jahreszins?

Aufgabe 11:

Jemand legt einen Betrag von EUR 7 600 bei einer Bank für eine Dauer von 5 Jahren an. Die Bank sagt dem Anleger eine Effektivverzinsung von 6% p.a. mit Zinseszinsen zu. Außerdem wird vereinbart, dass die die Zinsen vierteljährlich gutgeschrieben werden sollen.

a) Wie hoch ist der entsprechende unterjährliche Periodenzinssatz pro Quartal?

b) Auf welchen Betrag ist der Anlagebetrag nach 5 Jahren angewachsen?

Übungsaufgaben

Aufgabe 12:

Sparerin X legt 5 Jahre lang am Ende jeden Jahres EUR 200 auf einem Konto an, auf dem das Guthaben zu 8% p.a. Zinseszinsen angesammelt wird. Über welchen Betrag wird X am Ende dieses Fünfjahreszeitraums verfügen? Welchen Barwert hat die Abfolge der Einzahlungen, die X auf dieses Konto leistet?

Aufgabe 13:

Ein Arbeitnehmer beschließt an seinem 20. Geburtstag, dass er in genau 45 Jahren ein Vermögen von genau EUR 500000 durch jährlich-nachschüssige Raten zusammengespart haben will. Wie hoch müssen bei einem Zinssatz von konstant 6% und Anlage mit Zinseszinsen die Jahresraten sein, damit dieses Ziel erreicht wird?

Übungsaufgaben

Aufgabe 14:

Ein Wirtschaftsprüfer will in den Ruhestand eintreten und verkauft seine Praxis an eine jüngere Kollegin. Als Kaufpreis muss diese 12 Jahre lang jährlich-nachschüssig den Betrag von je EUR 1000 zahlen. Durch welchen Betrag könnte die Käuferin diese Zahlungsverpflichtung sofort bei Vertragsabschluss ablösen, wenn auf der Grundlage eines Zinssatzes von 4% p.a. mit Zinseszinsen kalkuliert wird?

Aufgabe 15:

Wie lange muss eine Person jährlich-nachschüssig einen Betrag von je EUR 1036,92 ansparen, um einen Endwert der Ersparnisse in Höhe von EUR 250000 zu erreichen? Gehen Sie davon aus, dass die Ersparnisse zu 6% p.a. Zinseszinsen angelegt werden können.

Übungsaufgaben

Aufgabe 16:

Ein Unternehmen benötigt für 8 Jahre einen Lagerplatz. Für diesen muss es eine jährlich-vorschüssige Pacht von EUR 12500,-- bezahlen. Durch welche einmalige Zahlung zu Beginn des Pachtverhältnisses könnte die gesamte Pachtverpflichtung für alle 8 Jahre abgelöst werden, wenn mit einem Zinssatz von 5% p.a. mit Zinseszinsen kalkuliert wird?

Aufgabe 17:

Der Besitzer eines Hauses ist vertraglich dazu verpflichtet, einer Hypothekenbank den Betrag von EUR 200000 sowie die darauf anfallenden Zinsen in jährlich-vorschüssigen Raten von je EUR 29644,39 zurückzuzahlen. Der Zinssatz beträgt 8% p.a.; es liegt eine Verzinsung mit Zinseszinsen vor. Nach wie vielen Jahren ist die Hypothek abbezahlt?

Übungsaufgaben

Aufgabe 18:

Einer Unternehmerin wird an ihrem 65. Geburtstag von einer Lebensversicherung der Betrag von EUR 250000,- ausgezahlt. Von diesem Kapital und den darauf entfallenden Zinsen möchte sie 20 Jahre lang eine jährlich-vorschüssige Rente beziehen. Wie hoch fällt diese Rente bei einem Zinssatz von konstant 8,5% p.a. mit Zinseszinsen aus?

Aufgabe 19:

Ein Sparer zahlt 5 Jahre lang am Ende jeden Monats den Betrag von EUR 250,- auf ein Konto ein. Das auf diesem Konto akkumulierte Guthaben wird jährlich-nachschüssig mit 3,5% p.a. verzinst. Über welchen Betrag kann der Sparer am Ende des genannten Fünfjahreszeitraums verfügen?

Übungsaufgaben

Aufgabe 20:

Ein Unternehmer nimmt einen Kredit über EUR 20000 auf. Dieser Kredit soll bei 10,5% jährlich-nachschüssigen Zinsen in 4 Jahren zurückgezahlt werden. Die Rückzahlung erfolgt in monatlich-nachschüssigen Raten. Wie hoch sind die monatlichen Rückzahlungsraten?

Aufgabe 21:

Sponsor S erklärt sich bereit, für den Mittelfeldspieler M des Fußballvereins V fünf Jahre lang das Grundgehalt (ohne Prämien etc.) zu bezahlen. Dieses Grundgehalt beträgt konstant EUR 6000 pro Monat und wird monatlich-vorschüssig gezahlt. Welchen Geldbetrag benötigt S für diese Abfolge von Zahlungen, wenn seine Hausbank für die Anlage der zur Verfügung gestellten Mittel jährlich-nachschüssig 7% Zinsen zahlt?

Übungsaufgaben

Aufgabe 22:

Ein Bauherr hat eine Hypothek von EUR 250000 zu einem Zinssatz von 8% bei jährlich-nachschüssiger Verzinsung aufgenommen. Diese Hypothek ist über einen Zeitraum von 30 Jahren in monatlich-vorschüssigen Raten zurückzuzahlen. Wie hoch sind die monatlichen Rückzahlungsraten?

Aufgabe 23:

Eine Sparerin zahlt 6 Jahre lang am Ende jeden Monats den Betrag von EUR 200 auf ein Bankkonto ein. Das Guthaben auf diesem Konto wird mit nominell 4% jährlich verzinst; allerdings werden die Zinsen unter Verwendung des relativen Monatszins-satzes am Ende jeden Monats gutgeschrieben. Wie hoch ist unter diesen Voraussetzungen

- der Barwert und
- der Endwert

der von der Sparerin geleisteteten Einzahlungen?

Übungsaufgaben

Aufgabe 24:

Nehmen Sie an, jemand habe EUR 45000,--. Bei welchem elcher zeitkonstante Zinssatz *r* könnte diese Person mit diesem Geldbetrag eine jährlich-nachschüssige ewige Rente in Höhe von EUR 1800 bezahlen?

Musterlösungen

Musterlösungen

Aufgabe 1:

Im Falle der einfachen Verzinsung gilt

$$A_T = A_0 \cdot (1 + T \cdot r)$$

mit
T = Laufzeit in Jahren
r = jährlicher Zinssatz
A_0 = Anlagebetrag am Beginn der Laufzeit
A_T = verfügbarer Geldbetrag am Ende der Laufzeit

Laut Aufgabenstellung gilt T = 10, r = 6,5%=0,065 und A_0 = EUR 650.

Durch Einsetzen in die obige Formel ergibt sich

$A_T = EUR\ 650 \cdot (1 + 10.0{,}065) = \text{EUR } 650 \cdot (1 + 0{,}65) = \text{EUR } 1072{,}50$

Musterlösungen

Aufgabe 2:

Im Falle der einfachen Verzinsung gilt

$$A_T = A_0 \cdot (1 + T \cdot r)$$

mit

T = Laufzeit in Jahren

r = jährlicher Zinssatz

A_0 = Anlagebetrag am Beginn der Laufzeit

A_T = verfügbarer Geldbetrag am Ende der Laufzeit

Durch Umstellung dieser Gleichung ergibt sich

$$1 + rT = \frac{A_T}{A_0}$$

Musterlösungen

oder $$rT = \frac{A_T}{A_0} - 1$$

bzw. $$rT = \frac{A_T - A_0}{A_0}$$

und folglich $$T = \frac{A_T - A_0}{r \cdot A_0}$$

Laut Aufgabenstellung gilt r = 5%=0,05 sowie A_0 = EUR 1200 und A_T = EUR 1 620.

Also gilt in diesem Fall $$T = \frac{1620 - 1200}{0{,}05 \cdot 1200} = \frac{420}{60} = 7$$

Musterlösungen

Aufgabe 3:

Im Falle der einfachen Verzinsung gilt

$$A_T = A_0 \cdot (1 + T \cdot r)$$

mit
T = Laufzeit in Jahren
r = jährlicher Zinssatz
A_0 = Anlagebetrag am Beginn der Laufzeit
A_T = verfügbarer Geldbetrag am Ende der Laufzeit

Durch Umstellung dieser Gleichung ergibt sich

$$1 + rT = \frac{A_T}{A_0}$$

Musterlösungen

oder $$rT = \frac{A_T}{A_0} - 1$$

bzw. $$rT = \frac{A_T - A_0}{A_0}$$

und folglich $$r = \frac{A_T - A_0}{T \cdot A_0}$$

Laut Aufgabenstellung gilt $T = 8$ sowie A_0 = EUR 3 200 und A_T = EUR 4 736.

Also gilt in diesem Fall

$$r = \frac{4736 - 3200}{8 \cdot 3200} = \frac{1536}{25600} = 0{,}06 = 6\%$$

Musterlösungen

Aufgabe 4:

Im Falle der jährlichen Verzinsung mit Zinseszinsen gilt

$$A_T = A_0 \cdot (1 + r)^T$$

mit
T = Laufzeit in Jahren
r = jährlicher Zinssatz
A_0 = Anlagebetrag am Beginn der Laufzeit
A_T = verfügbarer Geldbetrag am Ende der Laufzeit

Daraus folgt

$$(1+r)^T = \frac{A_T}{A_0}, \text{ also } 1+r = \left(\frac{A_T}{A_0}\right)^{1/T} \quad \text{und} \quad r = \left(\frac{A_T}{A_0}\right)^{1/T} - 1$$

Musterlösungen

Gesucht ist laut Aufgabenstellung derjenige Zinssatz r, für den $(A_T / A_0) = 3$ ist, wenn $T = 10$ Jahre gesetzt wird.

Durch Einsetzung der entsprechenden Terme in die Bestimmungsgleichung für r ergibt sich

$$\begin{aligned} r &= \left(\frac{A_T}{A_o}\right)^{1/T} - 1 \\ &= 3^{1/10} - 1 \\ &= 0{,}1161 \\ &= 11{,}61\% \end{aligned}$$

Musterlösungen

Aufgabe 5:

Im Falle der jährlichen Verzinsung mit Zinseszinsen gilt

$$A_T = A_0 \cdot (1 + r)^T$$

mit
T = Laufzeit in Jahren
r = jährlicher Zinssatz
A_0 = Anlagebetrag am Beginn der Laufzeit
A_T = verfügbarer Geldbetrag am Ende der Laufzeit

Daraus folgt $A_T / A_0 = (1+r)^T$

und $\ln(A_T / A_0) = T \cdot \ln(1+r)$

bzw. $$T = \frac{\ln(A_T / A_0)}{\ln(1+r)}$$

Musterlösungen

Aufgabe 5 (fortgesetzt):

Laut Aufgabenstellung verdreifacht sich der Anlagebetrag während der Laufzeit; es gilt also

$$(A_T / A_0) = 3$$

Außerdem wurde unterstellt, dass

$$r = 5{,}37\% = 0{,}0537$$

Daraus folgt in diesem Falle:

$$T = \frac{\ln(A_T / A_0)}{\ln(1+r)} = \frac{\ln(3)}{\ln(1+0{,}0537)} = 21{,}003$$

Musterlösungen

Aufgabe 6:

Der Barwert einer einzelnen, T Jahre in der Zukunft liegenden Zahlung Z_T entspricht demjenigen Betrag B_0, der, wenn er T Jahre lang zum unterstellten Zinssatz r angelegt wird, am Ende des Anlagezeitraums genau die Höhe der Zahlung Z_T erreicht.

Wird jährliche Verzinsung mit Zinseszinsen unterstellt, so besteht zwischen B_0 und Z_T in diesem Fall der folgende Zusammenhang:

$$B_0 = (1+r)^{-T} \cdot Z_T$$

Daraus folgt bei dieser Aufgabenstellung (T = 11, r = 8% = 0,08, Z_T = EUR 6 000

$$B_0 = (1+0{,}08)^{-11} \cdot \text{EUR } 6000 = \text{EUR } 2573{,}30$$

Musterlösungen

Aufgabe 7:

Der Barwert B_0 einer Gesamtheit von zwei oder mehr Zahlungen entspricht der Summe der Barwerte der einzelnen Zahlungen. Bei jährlicher Verzinsung mit Zinseszinsen wird dies im allgemeinen durch die Gleichung

$$B_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r)^t}$$

wiedergegeben.

In dem vorliegenden Fall haben wir einen Zeithorizont von $T = 4$ Jahren; es sind aber nur zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 4$ überhaupt Zahlungen zu verzeichnen. Also können bei dieser Aufgabenstellung $Z_2 = Z_3 = 0$ gesetzt werden. Außerdem gilt laut Aufgabenstellung Z_1 = EUR 225000 und Z_4 = EUR 410000 sowie $r = 4\% = 0{,}04$.

Musterlösungen

Aufgabe 7 (fortgesetzt):

Folglich gilt in diesem Fall

$$B_0 = \sum_{t=1}^{T} \frac{Z_t}{(1+r)^t}$$

$$= \frac{\text{EUR } 225\,000}{(1+0{,}04)^1} + \frac{\text{EUR } 0}{(1+0{,}04)^2} + \frac{\text{EUR } 0}{(1+0{,}04)^3} + \frac{\text{EUR } 410\,000}{(1+0{,}04)^4}$$

$$= \text{EUR } 216\,346{,}15 \qquad + \text{EUR } 350\,469{,}72$$

$$= \text{EUR } 566\,815{,}67$$

Musterlösungen

Aufgabe 8:

In dem vorliegenden Fall beträgt die Länge der Zinsperiode (also des Zeitraums, auf den sich der angegebene Zinssatz bezieht) einen Monat; es liegt also eine unterjährliche Verzinsung vor.

Der Zusammenhang zwischen dem Anlagebetrag A_0, dem Zinssatz r und dem am Ende der Laufzeit verfügbaren Geldbetrag A_T kann durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\begin{aligned} A_T &= A_0 + T \cdot r \cdot A_0 \\ &= A_0 \cdot (1 + T \cdot r) \end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung entspricht die Anlagelaufzeit 40 Tagen. Da außerdem jedes Jahr rechnerisch mit 360 Tagen angesetzt wurde, gilt in diesem Fall $T = 40/360 = 1/9$.

Der monatlich gewährte Zinssatz von $z = 0{,}3\%$ lässt sich wie folgt in einen Jahreszinssatz überführen:

Musterlösungen

Aufgabe 8 (fortgesetzt):

$$r = z \cdot P$$

mit P := Anzahl der Zinsperioden pro Jahr.

In dem vorliegenden Fall gilt

$$P = 12$$

und, wegen z = 0,3% = 0,003

$$r = 0{,}003 \cdot 12 = 0{,}036$$

Durch Einsetzen in die Gleichung für den Endwert der Anlage ergibt sich

$$A_T = A_0 \cdot (1 + T \cdot r)$$

$$= \text{EUR } 81000 \cdot (1 + (1/9) \cdot 0{,}036) = \text{EUR } 81\,324.$$

Musterlösungen

Aufgabe 9:

In dem vorliegenden Fall beträgt die Länge der Zinsperiode (also des Zeitraums, auf den sich der angegebene Zinssatz bezieht) einen Tag; es liegt also eine unterjährliche Verzinsung vor.

Der Zusammenhang zwischen dem Anlagebetrag A_0, dem Zinssatz r und dem am Ende der Laufzeit verfügbaren Geldbetrag A_T kann durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$A_T = A_0 + T \cdot r \cdot A_0$$

$$= A_0 \cdot (1 + T \cdot r)$$

Laut Aufgabenstellung entspricht die Anlagelaufzeit 45 Tagen. Da außerdem jedes Jahr rechnerisch mit 360 Tagen angesetzt wurde, gilt in diesem Fall $T = 45/360 = 1/8$.

Der tägliche Zinssatz von z = 0,02% lässt sich wie folgt in einen Jahreszinssatz überführen:

Musterlösungen

Aufgabe 9 (fortgesetzt):

$$r = z \cdot P$$

mit P := Anzahl der Zinsperioden pro Jahr.

In dem vorliegenden Fall gilt

$$P = 360$$

und, wegen z = 0,02% = 0,0002

$$r = 0{,}0002 \cdot 360 = 0{,}072$$

Durch Einsetzen in die Gleichung für den Endwert ergibt sich

$$A_T = A_0 \cdot (1 + T \cdot r)$$

$$= \text{EUR } 800 \cdot (1 + (1/8) \cdot 0{,}072) = \text{EUR } 807{,}20.$$

Musterlösungen

Aufgabe 10:

Im Falle der unterjährlichen Verzinsung mit Zinseszinsen besteht zwischen dem Endwert der jeweiligen Anlage A_T, dem Anlagebetrag A_0, der Laufzeit in Jahren T, dem für eine Zinsperiode maßgeblichen Zinssatz z und der Anzahl der Zinsperioden in einem Jahr P der folgende Zusammenhang:

$$A_T = A_0(1+z)^{T\cdot P}$$

Laut Aufgabenstellung gilt A_0 = EUR 800, T = 4, z = 0,6% = 0,006 und P=12.

Durch Einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} A_T &= A_0(1+z)^{T\cdot P} \\ &= \text{EUR}\,800\cdot(1+0{,}006)^{4\cdot 12} \\ &= \text{EUR}\,1066{,}09 \end{aligned}$$

Musterlösungen

Aufgabe 10 (fortgesetzt):

Zwischen dem effektiven Jahreszins r^* und dem unterjährlichen Periodenzinssatz z besteht also der folgende Zusammenhang:

$$A_0 (1+z)^{T \cdot P} \;=\; A_0 \left(1+r^*\right)^T$$

Daraus folgt für den Zusammenhang zwischen dem effektiven Jahreszins und dem periodenbezogenen Zinssatz bei unterjährlicher Verzinsung

$$r^* \;=\; (1+z)^P - 1$$

Laut Aufgabenstellung gilt $z = 0{,}6\% = 0{,}006$ und $P = 12$. Daraus folgt für den effektiven Jahreszins

$$r^* \;=\; (1+0{,}006)^{12} - 1$$

$$= \; 0{,}07442 \;=\; 7{,}442\%$$

Musterlösungen

Aufgabe 11:

Zwischen dem unterjährlichen Periodenzinssatz z und dem effektiven Jahreszins r^* besteht der folgende Zusammenhang:

$$z = \left(1 + r^*\right)^{1/P} - 1$$

mit P := Anzahl der Zinsperioden pro Jahr

Laut Aufgabenstellung gilt: $r^* = 6\% = 0{,}06$ sowie $P = 4$.

Daraus folgt für den unterjährlichen Quartalszinssatz

$$z = \left(1 + 0{,}06\right)^{1/4} - 1$$

$$= 0{,}014674 = 1{,}4674\%$$

Musterlösungen

Aufgabe 11 (fortgesetzt):

Der Zusammenhang zwischen dem Endwert der Anlage nach T Jahren, A_T, dem Anlagebetrag A_0 und dem effektiven Jahreszinssatz r^* lautet

$$A_T = A_0 (1 + r^*)^T$$

Laut Aufgabenstellung gilt: $r^* = 0{,}06$, $T = 5$, A_0 = EUR 7 600 sowie $P = 4$.

Daraus folgt für den Endwert der Anlage nach 5 Jahren

$$\begin{aligned} A_T &= (1 + 0{,}06)^5 \cdot A_0 \\ &= 1{,}3382256 \cdot \text{EUR } 7\,600 \\ &= \text{EUR } 10170{,}51 \end{aligned}$$

Musterlösungen

Aufgabe 12:

Aus finanzmathematischer Sicht ist die Abfolge der Einzahlungen der Sparerin X auf dieses Konto eine jährlich-nachschüssig gezahlte Rente. Darum lässt sich der Barwert B_0 dieser Zahlungen mit Hilfe der Bestimmungsgleichung für den Barwert einer derartigen Rente ermitteln:

$$B_0 = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^T} \right]$$

mit r = Zinssatz (hier: r = 8% = 0.08)
Z = Höhe des jährlichen Rentenzahlbetrages (hier: Z = EUR 200)
T = Rentenlaufzeit in Jahren (hier: T = 5)

Musterlösungen

Aufgabe 12 (fortgesetzt):

Einsetzen der entsprechenden Werte ergibt in diesem Falle für den Rentenbarwert

$$B_0 = \text{EUR } 200 \cdot \left[\frac{0{,}4693}{0{,}08 \cdot 1{,}4693} \right]$$

$$= \text{EUR } 798{,}54$$

Zur Bestimmung des Rentenendwertes kann in diesem Fall die folgende Formel werangezogen werden:

$$W_T = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r} \right]$$

Musterlösungen

Aufgabe 12 (fortgesetzt):

Durch Einsetzen der Werte aus der Aufgabenstellung ergibt sich

$$W_T \;=\; \text{EUR } 200 \cdot \left[\frac{(1+08)^5 - 1}{0{,}08} \right]$$

$$= \;\text{EUR } 1173{,}32$$

Musterlösungen

Aufgabe 13:

Durch Auflösen der Bestimmungsgleichung für den Rentenendwert bei jährlich-nachschüssigen Rentenzahlungen,

$$W_T = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r} \right]$$

nach dem jährlichen Rentenzahlbetrag Z ergibt sich der Ausdruck

$$Z = W_T \cdot \left[\frac{r}{(1+r)^T - 1} \right]$$

Laut Aufgabentext soll gelten: W_T = 500 000, r = 0,06 und T = 45.

Musterlösungen

Aufgabe 13 (fortgesetzt):

Also gilt in diesem Falle

$$Z = \text{EUR } 500000 \cdot \left[\frac{0{,}06}{(1+0{,}06)^{45} - 1} \right]$$

$$= \text{EUR } 2350{,}25$$

Aufgabe 14:

Hier ist wieder nach dem Barwert B_0 der jährlich-nachschüssig zu entrichtenden Rentenzahlungen gefragt. Die entsprechende Bestimmungsgleichung lautet:

$$B_0 = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^T} \right]$$

Musterlösungen

Aufgabe 14 (fortgesetzt):

In dieser Gleichung bedeutet

r = Zinssatz (hier: r = 4% = 0,04)
Z = Höhe des jährlichen Rentenzahlbetrages (hier: Z = EUR 1000)
T = Rentenlaufzeit in Jahren (hier: T = 12)

Einsetzen der entsprechenden Werte ergibt in diesem Falle für den Rentenbarwert

$$B_0 = \text{EUR } 1000 \cdot \left[\frac{1{,}04^{12} - 1}{0{,}04 \cdot 1{,}04^{12}} \right]$$

$$= \text{EUR } 1000 \cdot \left[\frac{0{,}601032}{0{,}04 \cdot 1{,}601032} \right]$$

$$= \text{EUR } 9385{,}07$$

Musterlösungen

Aufgabe 15:

In dieser Aufgabe ist die Rentenlaufzeit gesucht, die bei gegebenem Zinssatz (hier: r = 6,0% = 0,06) und bekanntem jährlich-nachschüssigem Rentenzahlbetrag (hier: Z = EUR 1036,92) einen vorgegebenen Rentenendwert (hier: W_T = 250000) ergibt. Zur Lösung ist die Bestimmungsgleichung für den Rentenendwert (wie im Haupttext gezeigt) nach der Rentenlaufzeit aufzulösen. Es ergibt sich

$$T = \frac{\ln\left(r \cdot W_T + Z\right) - \ln Z}{\ln(1+r)}$$

Nach Einsetzen der Zahlenaus der Aufgabenstellung erhalten wir

$$T = \frac{\ln\left(0{,}06 \cdot 250000 + 1036{,}92\right) - \ln\left(1036{,}92\right)}{\ln(1{,}06)} = 47$$

Musterlösungen

Aufgabe 16:

Gesucht ist in diesem Fall der Barwert B_0 einer jährlich-vorschüssigen Rentenzahlung in Höhe von Z = EUR 12500 bei einer Rentenlaufzeit von T = 8 Jahren und einem zugrunde gelegten Zinssatz von r = 5%.

Die Formel für den Barwert einer so ausgestalteten Rente lautet in allgemeiner Form

$$B_0 = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^{T-1}} \right]$$

Nach Einsetzen der Zahlen aus der Aufgabenstellung ergibt sich

$$B_0 = \text{EUR } 12500 \cdot \left[\frac{(1+0{,}05)^8 - 1}{0{,}05 \cdot (1+0{,}05)^{8-1}} \right] = \text{EUR } 12500 \cdot \frac{0{,}477455}{0{,}05 \cdot 1{,}4071}$$

$$= \text{EUR } 84829{,}61$$

Musterlösungen

Aufgabe 17:

In diesem Beispiel geht es um eine jährlich-vorschüssige Rente, deren Höhe (hier: Z = EUR 28800) und Barwert (hier: B_0 = EUR 200000) bekannt sind, und für die bei vorgegebenem Zinssatz (hier: r = 8% = 0,08) die Rentendauer T zu ermitteln ist.

Hierzu muss die Formel für den Rentenbarwert bei jährlich-vorschüssigen Rentenzahlungen,

$$B_0 = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^{T-1}} \right]$$

nach T aufgelöst werden

$$T = 1 - \frac{\ln\left((1+r) - \frac{B_0 \cdot r}{Z} \right)}{\ln(1+r)}$$

Musterlösungen

Aufgabe 17 (fortgesetzt):

Durch Einsetzen der Zahlenangaben aus der Aufgabenstellung erhalten wir

$$T = 1 - \frac{\ln\left((1{,}08) - \dfrac{200000 \cdot 0{,}08}{29644{,}39}\right)}{\ln(1{,}08)} = 9$$

Aufgabe 18:

Hier geht es um eine jährlich-vorschüssig gewährte Rente mit einer Laufzeit von T = 20 Jahren, und einem Barwert von B_0 = EUR 250000,- bei einem Zinssatz r = 8,5% = 0,085. Gesucht ist die Höhe der jährlich-vorschüssigen Rentenzahlung Z.

Musterlösungen

Aufgabe 18 (fortgesetzt):

Es gilt in diesem Fall für den Rentenbarwert

$$B_0 \;=\; Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^{T-1}} \right]$$

Auflösung dieser Gleichung nach *Z* ergibt

$$Z \;=\; B_0 \cdot \left[\frac{r \cdot (1+r)^{T-1}}{(1+r)^T - 1} \right]$$

Durch Einsetzen der in der Aufgabenstellung vorgegebenen Zahlen erhalten wir

$$Z \;=\; \text{EUR } 250000 \cdot \left[\frac{0{,}085 \cdot 1{,}085^{20-1}}{(1+0{,}085)^{20} - 1} \right] \;=\; 24348{,}15$$

Musterlösungen

Aufgabe 19:

In diesem Fall ist der Barwert einer unterjährlich (hier: monatlich) und nachschüssig gezahlten Rente $Z^{(m)}$ in Höhe von EUR 250,-- zu ermitteln, die jährlich-nachschüssig verzinst wird. Die Anzahl M der Rentenzahlungen pro Jahr beträgt 12.

Der Rechenweg zur Ermittlung des Barwertes führt in diesem Fall zunächst über die Berechnung der äquivalenten Jahresrente $\tilde{Z}$. Die Bestimmungsgleichung hierfür lautet im Fall unterjährlich-nachschüssiger Rentenzahlungen

$$\tilde{Z} = Z^{(m)} \cdot \left[M + \frac{r}{2} \cdot (M - 1) \right]$$

Einsetzen der in der Aufgabenstellung vorgegebenen Zahlen ergibt

$$\tilde{Z} = \text{EUR } 250 \cdot \left[12 + \frac{0{,}035}{2} \cdot (12 - 1) \right] = \text{EUR } 250 \cdot [12 + 0{,}0175 \cdot 11]$$

$$= 3048{,}125$$

Musterlösungen

Aufgabe 19 (fortgesetzt):

In einem zweiten Schritt wird die so erhaltene äquivalente Jahresrente $\tilde{Z}$ in die Bestimmungsgleichung für den Endwert W_T einer jährlich-nachschüssigen Rente eingesetzt:

$$W_T = Z \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r} \right]$$

Nun können hier der zuvor berechnete Wert von $\tilde{Z}$ sowie die in der Aufgabenstellung gemachten Angaben $T = 5$ und $r = 0{,}035$ Verwendung finden:

$$B_0 = \text{EUR } 3048{,}125 \cdot \left[\frac{(1+0{,}035)^5 - 1}{0{,}035} \right] = \text{EUR } 3048{,}125 \cdot 5{,}3625$$

$$= \text{EUR } 16345{,}47$$

Musterlösungen

Aufgabe 20:

Hier ist nach der Höhe $Z^{(m)}$ einer monatlich-nachschüssigen Rente gefragt, deren Barwert (=der Kreditbetrag) bekannt ist. Zur Lösung wird in zwei Schritten vorgegangen:

<u>Schritt 1:</u> Ermittlung derjenigen fiktiven jährlich-nachschüssigen Rente $\tilde{Z}$, die für eine Tilgung des Kredits in T=4 Jahren bei einem Zinssatz von r = 0,105 erforderlich wäre.

<u>Schritt 2:</u> Umrechnung dieser äquivalenten Jahresrente $\tilde{Z}$ in den unterjährlichen (hier: monatlichen)Rentenzahlbetrag $Z^{(m)}$

Für Schritt 1 ist es zunächst wichtig zu rekapitulieren, wie der jährlich-nachschüssige Rentenzahlbetrag $\tilde{Z}$ aus dem Barwert der Rente hergeleitet werden kann. Es gilt der (aus dem Abschnitt über jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen bekannte) Zusammenhang

$$\tilde{Z} = B_0 \cdot \left[\frac{r \cdot (1+r)^T}{(1+r)^T - 1} \right]$$

Musterlösungen

Aufgabe 20 (fortgesetzt):

Laut Aufgabenstellung gilt: B_0 = EUR 20000, T=4, r = 0,105 und folglich

$$\tilde{Z} = B_0 \cdot \left[\frac{r\cdot(1+r)^T}{(1+r)^T - 1}\right] = \text{EUR } 20000 \cdot \left[\frac{0{,}105\cdot(1+0{,}105)^4}{(1+0{,}105)^4 - 1}\right] = \text{EUR } 6377{,}84$$

Nun folgt Schritt 2: Im Falle einer unterjährlich-nachschüssigen Rente besteht zwischen der äquivalenten Jahresrente $\tilde{Z}$ und der unterjährlichen Rentenzahlung $Z^{(m)}$ folgender Zusammenhang:

$$\tilde{Z} = Z^{(m)} \cdot \left[M + \frac{r}{2}\cdot(M-1)\right]$$

mit M = Anzahl der Rentenzahlungen pro Jahr, also hier: M = 12,

Dies lässt sich umschreiben zu $$Z^{(m)} = \frac{\tilde{Z}}{M + (1/2)\cdot r\cdot(M-1)}$$

Musterlösungen

Aufgabe 20 (fortgesetzt):

Jetzt müssen nur noch die bekannten Werte von r, M und $\tilde{\tilde{Z}}$ (aus Schritt 1) in diese Gleichung eingesetzt werden, um das Ergebnis zu erhalten:

$$Z^{(m)} = \frac{\tilde{\tilde{Z}}}{M + (1/2) \cdot r \cdot (M-1)} = \frac{\text{EUR } 6377{,}84}{12 + (1/2) \cdot 0{,}105 \cdot (12-1)} = \text{EUR } 507{,}08$$

Musterlösungen

Aufgabe 21:

Hier geht es um den Barwert B_0 einer unterjährlich (hier: monatlich) und vorschüssig gezahlten Rente bei jährlich-nachschüssiger Verzinsung.

Zunächst wird auch in diesem Fall die äquivalente Jahresrente $\tilde{Z}$ zu der aus der Aufgabenstellung bekannten unterjährlichen Rente $Z^{(m)}$ ermittelt. In diesem Fall stehen diese beiden Größen in folgendem Zusammenhang:

$$\tilde{Z} \;=\; Z^{(m)} \cdot \left[M + \frac{r}{2} \cdot (M+1) \right]$$

Aus der Aufgabenstellung ist bekannt: M = Anzahl der Rentenzahlungen pro Jahr = 12, r = 7% = 0,07 und $Z^{(m)}$ = EUR 6000. Also gilt in diesem Fall:

$$\tilde{Z} \;=\; \text{EUR } 6000 \cdot \left[12 + \frac{0{,}07}{2} \cdot (12+1) \right] \;=\; \text{EUR } 74730$$

Musterlösungen

Aufgabe 21 (fortgesetzt):

Einsetzen dieser äquivalenten Jahresrente in die Bestimmungsgleichung für den Barwert B_0 einer jährlich-nachschüssigen Rente

$$B_0 \;=\; \tilde{Z} \cdot \left[\frac{(1+r)^T - 1}{r \cdot (1+r)^T} \right]$$

ergibt wegen $T = 5$ und $r = 0{,}07$

$$B_0 \;=\; \text{EUR } 74730 \cdot \left[\frac{(1+0{,}07)^5 - 1}{0{,}07 \cdot (1+0{,}07)^5} \right] \;=\; \text{EUR } 74730 \cdot \left[\frac{(1+0{,}07)^5 - 1}{0{,}07 \cdot (1+0{,}07)^5} \right]$$

$$=\; \text{EUR } 306407{,}75$$

Musterlösungen

Aufgabe 22:

Die Raten, mit denen die Hypothek zurückgezahlt wird, sind, finanzmathematisch gesehen, eine monatlich-vorschüssige Rente. Deren Höhe gilt es anhand der Angaben über den Barwert B_0 dieser Rente (=Höhe der Hypothek = EUR 250000), den Zinssatz r (= 8% = 0,08) und die Laufzeit (T=30) zu bestimmen.

Zur Lösung wird in zwei Schritten vorgegangen:

Schritt 1: Ermittlung derjenigen fiktiven jährlich-nachschüssigen Rente $\tilde{Z}$, die für eine Tilgung des Kredits in T=30 Jahren bei einem Zinssatz von r = 0,08 erforderlich wäre.

Schritt 2: Umrechnung dieser äquivalenten Jahresrente $\tilde{Z}$ in den unterjährlichen (hier: monatlichen), vorschüssigen Rentenzahlbetrag $Z^{(m)}$

Musterlösungen

Aufgabe 22 (fortgesetzt):

Für Schritt 1 ist zunächst zu klären, wie der jährlich-nachhschüssige Rentenzahlbetrag $\tilde{Z}$ aus dem Barwert B_0 der Rente hergeleitet werden kann. Aus dem Abschnitt über jährlich-nachschüssige Rentenzahlungen ist der folgende Zusammenhang bekannt:

$$\tilde{Z} = B_0 \cdot \left[\frac{r \cdot (1+r)^T}{(1+r)^T - 1} \right]$$

Einsetzen der Werte aus der Aufgabenstellung ergibt in diesem Fall

$$\tilde{Z} = \text{EUR } 250000 \cdot \left[\frac{0{,}08 \cdot (1+0{,}08)^{30}}{(1+0{,}08)^{30} - 1} \right] = 22206{,}86$$

Musterlösungen

Aufgabe 22 (fortgesetzt):

Nun folgt Schritt 2: Im Falle einer unterjährlich-vorschüssigen Rente besteht zwischen der äquivalenten Jahresrente $\tilde{Z}$ und der unterjährlichen Rentenzahlung $Z^{(m)}$ folgender Zusammenhang:

$$\tilde{Z} = Z^{(m)} \cdot \left[M + \frac{r}{2} \cdot (M+1) \right]$$

mit M = Anzahl der Rentenzahlungen pro Jahr; hier also M = 12

Dies kann umgeformt werden zu

$$Z^{(m)} = \frac{\tilde{Z}}{M + (r/2) \cdot (M+1)}$$

Musterlösungen

Aufgabe 22 (fortgesetzt):

In diese Formel können die in Schritt 1 errechneten bzw. aus der Aufgabenstellung bekannten Werte eingesetzt werden. Dann folgt:

$$Z^{(m)} = \frac{\text{EUR } 22206{,}86}{12 + (0{,}08/2) \cdot (12+1)} = \text{EUR } 1773{,}71$$

Aufgabe 23:

Der hier diskutierte Fall ist dadurch gekennzeichnet, dass zwar auch hier unterjährliche Rentenzahlungen erfolgen, aber anders als in den vorangegangenen Aufgaben die Zinsperiode (also der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Zinszahlungen) mit der Rentenperiode (also der zeitliche Abstand zwischen zwei aufeinander folgenden Rentenzahlungen) identisch ist.

Musterlösungen

Aufgabe 23 (fortgesetzt):

Laut Aufgabenstellung haben wir eine Rentenperiode von einem Monat. Die Anzahl der Rentenzahlungen innerhalb eines Jahres (=M) entspricht also 12. Da also r = 4% = 0,04 gilt, entspricht der relative unterjährige Periodenzinssatz (r/M) also 0,04/12 = 1/300.

Für die Höhe der monatlichen Rentenzahlung gilt laut Aufgabenstellung $Z^{(m)} = 200$ und für die Rentenlaufzeit $T = 6$.

In allgemeiner Form lautet die Bestimmungsgleichung für den Rentenbarwert B_0 bei unterjährlich-nachschüssigen Rentenzahlungen sowie Gleichheit von Zins- und Rentenperiode

$$B_0 = Z^{(m)} \cdot \left[\frac{\left(1+(r/M)\right)^{M \cdot T} - 1}{(r/M) \cdot \left(1+(r/M)\right)^{M \cdot T}} \right]$$

Aufgabe 23 (fortgesetzt):

Durch Einsetzen der Angaben aus der Aufgabenstellung erhalten wir in diesem Fall

$$B_0 = 200 \cdot \left[\frac{(1+(0{,}04/12))^{6\cdot 12} - 1}{(0{,}04/12)\cdot(1+(0{,}04/12))^{6\cdot 12}} \right]$$

$$= 12783{,}49$$

Die Bestimmungsgleichung für den Rentenbarwert W_T bei unterjährlich-nachschüssigen Rentenzahlungen sowie Gleichheit von Zins- und Rentenperiode

$$W_T = Z^{(m)} \cdot \left[\frac{(1+(r/M))^{M\cdot T} - 1}{(r/M)} \right]$$

Musterlösungen

Aufgabe 23 (fortgesetzt):

Einsetzen der Angaben aus der Aufgabenstellung erhalten wir in diesem Fall

$$W_T \;=\; 200 \cdot \left[\frac{\left(1+(0{,}04/12)\right)^{6\cdot 12} - 1}{(0{,}04/12)} \right]$$

$$= \; 16244{,}51$$

Aufgabe 24:

Im Falle einer jährlich-nachschüssig gewährten ewigen Rente besteht zwischen der Rentenhöhe Z, dem Zinssatz r und dem Rentenbarwert B_0 der folgende Zusammenhang:

$$B_0 \;=\; \frac{Z}{r}$$

Musterlösungen

Aufgabe 24 (fortgesetzt):

In der Aufgabenstellung sind der Rentenbarwert B_0 (hier: das aktuelle Geldvermögen der Person = EUR 45000) und die Rentenhöhe (hier: Z = EUR 1800) bekannt; unbekannt ist der Zinssatz r. Wir lösen daher die zuletzt genannte Gleichung nach r auf:

$$r = \frac{Z}{B_0}$$

und erhalten durch Einsetzen der in der Aufgabenstellung enthaltenen Angaben

$$r = \frac{1800}{45000} = 0{,}04 = 4\%$$